NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110/TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 14

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $w \neq 1$ være en løsning av ligningen $z^3 = 1$. Da er

$$\det A = ?$$

Hver student får én av disse:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} w & w^2 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & w & w^2 \\ w^2 & w & 1 \\ w & w^2 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} w & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \\ w & w^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) 1 b) -1 c) 0 d) i e) -i

Løsning:

I hver variant er det en rad eller en kolonne som er en multipell av en annen. Dette medfører at kolonnnen ikke er lineært uavhengige, og dermed er determinanten 0.

I første variant er andre rad w gange første rad. I andre variant er første rad w gange andre rad. I tredje variant er tredje rad w ganger første rad. Og i fjerde variant er andre rad w ganger første rad.

Eventuelt kan man gjøre en direkte utregning:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{pmatrix} = 1(w^2 - w) - w(w - w^2) + w^2(w^2 - w^4) = w^2 - w - w^2 + 1 + w - 1 = 0$$

Vi bruker her at $w^3 = 1$, slik at også $w^4 = w$ og $w^6 = 1$.

Oppgave 2 La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, der hver student får én av disse:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hvilken matrise A er slik at $\mathbf{v}$ står vinkelrett på kolonnerommet til A?

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Løsning:

En vektor $\mathbf{v}$ står vinkelrett på kolonnerommet til A hvis og bare hvis $A^T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. I denne oppgaven har første variant a) som riktig svar, andre variant har b), tredje c), osv.

For eksempel er $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

Oppgave 3 La A være en reell $n \times n$-matrise, og la $\mathbf{b}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ som er ulik nullvektoren.

For hver av de oppgitte delmengdene av $\mathbb{R}^n$, avgjør om mengden er et underrom av $\mathbb{R}^n$. (Hver kandidat får oppgitt fem mengder.)

1.1 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$	2.1 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 0\}$
1.2 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 0\}$	2.2 $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$
1.3 $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$	2.3 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 0\}$
1.4 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}\}$	2.4 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}\}$
1.5 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 0\}$	2.5 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \neq 0\}$

3.1 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}\}$	4.1 $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$
3.2 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 0\}$	4.2 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \neq 0\}$
3.3 $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$	4.3 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}\}$
3.4 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$	4.4 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 0\}$
3.5 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 0\}$	4.5 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 0\}$

Løsning:

1.1, 2.5, 3.4, og 4.2 inneholder ikke nullvektor. De kan derfor ikke være underrom.

1.2, 2.1, 3.2, og 4.5 er nullrommet til A, som er et underrom.

1.3, 2.2, 3.3, og 4.1 er kolonnerommet til A, som er et underrom.

1.4, 2.4, 3.1, og 4.3 er egenrom til A, altså er de underrom.

1.5, 2.3, 3.5, og 4.4 er ortogonalkomplementet til $\mathrm{Sp}\{\mathbf{b}\}$, som er et underrom. Alternativt kan man se på det som nullrommet til $\mathbf{b}^T$.

Oppgave 4 La A være en reell 3×3-matrise som er øvre triangulær, og med $\det(A) = -1$. Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

1. A har alltid to komplekse egenverdier som ikke er reelle
2. A har alltid -1 som en av sine egenverdier

3. A har alltid minst én negativ reell egenverdi
4. A er alltid diagonaliserbar
5. Det er alltid slik at $A^T = A^{-1}$

Løsning:

Det store poenget i denne oppgaven er at A er øvre triangulær, for det betyr at egenverdiene står på diagonalen, kall dem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. De er alle reelle siden matrisen er reell. Determinanten av en øvre triangulærmatrise er produktet av diagonalelementene, altså $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$. Så da kan vi ta påstandene:

1. Det at produktet av tre reelle tall blir -1, trenger ikke bety at noen av dem er komplekse, vi kan for eksempel ha, $1, 1, -1$, og matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ er et eksempel som oppfyller kravene i oppgaven, men kun har reelle egenverdier.

2. Det at produktet av tre reelle tall blir -1, trenger ikke bety at noen av dem er lik -1, vi kan for eksempel ha $1, -2, \frac{1}{2}$, og matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ er et eksempel som oppfyller kravene i oppgaven, men ikke har noen egenverdier lik -1.

3. Det at produktet av tre tall blir -1, betyr at enten ett eller tre av dem er negative, så minst én av egenverdiene må være negativ.

4. Matrisen trenger ikke å være diagonaliserbar, man vet ikke nok om egenverdiene. Det at produktet deres er -1 kan være oppfylt om alle tre er lik -1, og da har man en egenverdi med algebraisk mutliplisitet 3, altså ville man trengt at nullrommet til $(A - (-1)I) = (A + I)$ er tredimensjonalt for alle gyldige matriser A. Det er kun oppfylt hvis $(A + I)$ er lik nullmatrisen, men vi kan fritt styre elementene over diagonalen, så for eksempel $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ er et moteksempel.

5. Dette alternativet har ingenting med egenskapene nevnt i oppgaven å gjøre. Et enkelt eksempel på en matrise som oppfyller kravene i oppgaven som vi brukte tidligere er $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, som helt klart ikke har sin egen transponerte som invers.

Oppgave 5 La U være et underrom av $\mathbb{R}^3$ av dimensjon 2. La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være projeksjonen ned på U. Altså $T(\mathbf{x}) = \text{proj}_U(\mathbf{x})$. Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

a) U er et plan som inneholder origo

b) $T^2 = T$ (der $T^2 = T \circ T$)

c) $\operatorname{Ker} T$ er et to-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^3$

d) $\operatorname{Im} T = U$

e) T er diagonaliserbar

Løsning:

a) U er et plan som inneholder origo: Sant, 2-dimensjonale underrom er nøyaktig plan som innehloder origo.

b) $T^2 = T$ (der $T^2 = T \circ T$): Sant, å anvende en projeksjon to ganger blir det samme som å bare anvende den en gang. Vi vet at projeksjonen sender alle vektorene ned i planet U, og at vektorene som allerede er der blir liggende i ro. Så når alt er sendt ned dit første gangen, blir det liggende stille hvis vi bruker T igjen.

c) $\operatorname{Ker} T$ er et to-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^3$: Usant, kjerner til T er ortogonalkomplementet til U, som er 1-dimensjonalt.

d) $\operatorname{Im} T = U$: Sant, hvis vi projiserer ned på U blir bildet U.

e) T er diagonaliserbar: Sant, projeksjoner er alltid diagonaliserbare.

   Vi kan også se dette ved å se på egenrommene til T. Den har egenverdi 1 med egenrom U og egenverdi 0 med egenrom $U^{\perp}$. Disse spenner til sammen ut hele $\mathbb{R}^3$, så vi kan finne en egenbasis. Utrykt i egenbasisen vil T være diagonal, så den er diagonaliserbar.

Oppgave 6 Betrakt ligningssystemet med totalmatrise (**kommentar:** hver kandidat får én av disse)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & a^2-2 & a-1 \end{array}\right], \quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & a^2-2 & a \end{array}\right]$$

,

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & a^2-3 & a \end{array}\right]$$

For hvilke reelle verdier av a har ligningssystemet

- nøyaktig én løsning?
- ingen løsninger?
- uendelig mange løsninger?

Løsning:

Hvis vi radreduserer systemene får vi

$$A \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right], \quad A \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a+1 \end{array}\right]$$

,

$$A \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right].$$

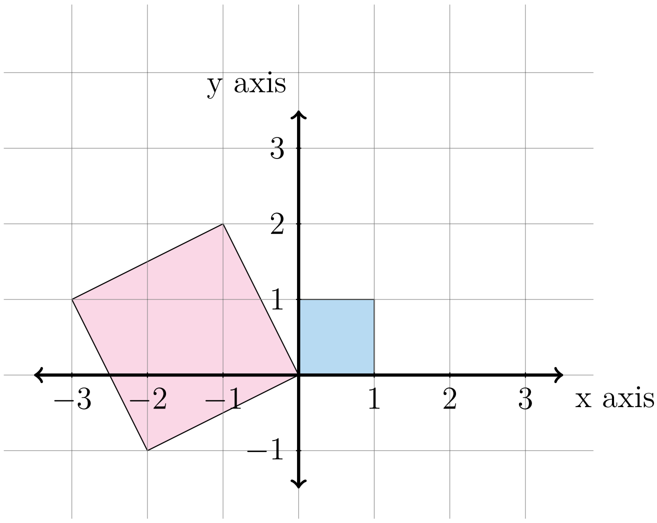
Får at systemet skal ha en unik løsning må vi ha et pivotelement i hver kolonne. Vi har allerede pivotelement i første og andre, så vi må kun se på tredje kolonne. I alle tre variantene skjer dette når $a^2 - 1 \neq 0$. Med andre ord når a er forskjellig fra 1 og -1.

Får at systemet skal ha ingen løsning må vi ha en ulovlig rad. Dvs vi må ha en rad på formen $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & x \end{array}\right]$ der $x \neq 0$. I det første å siste systemet skjer dette når $a^2 - 1 = 0$ og $a - 1 \neq 0$, altså når $a = -1$. I det andre systemet skjer dette når $a^2 - 1 = 0$ og $a + 1 \neq 0$, altså når $a = 1$.

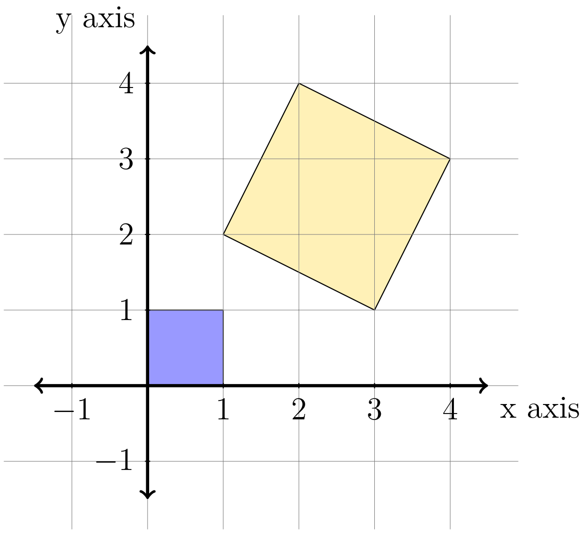
Systemet får uendelig mange løsninger når det ikke har et pivotelement i tredje rad uten å ha en ulovlig rad. I det første og siste systemet er dette for $a = 1$. I det andre systemet er dette for $a = -1$.

Oppgave 7

a) Finn en lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som sender den blå firkanten til den rosa (Med andre ord: for alle vektorer $\mathbf{v}$ i den blå firkanten, skal $T(\mathbf{v})$ ligge i den rosa, og ingen vektorer fra utenfor den blå firkanten skal lande i den rosa). Kantene til firkantene regnes som del av dem.



b) Forklar hvorfor det ikke finnes noen lineærtransformasjon som sender den lilla firkanten til den gule.



Løsning:

a) Den blå firkanten er et parallellogram spent ut av vektorene $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, mens den rosa firkanten er et parallelogram spent ut av $\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$. En lineærtransformasjon som sender den blå firkanten til den rosa, må altså sende disse vektorene til hverandre. To mulig løsninger er

$$T = \begin{pmatrix}-2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad T = \begin{pmatrix}-1 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}.$$

b) Den lilla firkanten inneholder nullvektor, mens den gule gjør ikke det. En lineærtransformasjon vil alltid sende nullvektor til seg selv, så den kan ikke sende den lilla firkanten til den gule.

Oppgave 8 Sommerferie-entusiast Viktor Felt har planene klare for sommeren, for i sommer skal han nemlig surfe, stå på vannski og bade. For å ha tid til å spise jordbær og drikke brus, begrenser han seg til én aktivitet pr. dag, men han kommer enten til å surfe, stå på vannski eller bade hver eneste dag.

- Viktor er ikke spesielt flink til å surfe, og faller mye i vannet. Derfor bader han aldri dagen etter at han har surfet, mens det er 1/3 sannsynlighet for at han prøver seg på surfing igjen neste dag.
- Viktor er heller ikke så veldig flink til å stå på vannski, og faller mye da også. Derfor har han heller aldri lyst til å bade dagen etter vannski, og bytter aktivitet til surfing med 2/3 sannsynlighet dagen etter.
- Dagen etter han har badet, velges de tre aktivitetene med like stor sannsynlighet.

a) Finn overgangsmatrisen M, og forklar hvorfor den ikke er regulær.

b) Finn egenverdiene til M, og finn den unike likevektsvektoren.

c) Finn en stokastisk 3×3-matrise som er ulik identitetsmatrisen og som **ikke** har en unik likevektsvektor.

Løsning:

a) Overgangsmatrisa blir $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

M^k beskriver sannsynligheten for at Viktor gjør en aktivitet k dager senere avhengig av hvilken han gjorde den gitte dagen. Legg merke til at hvis viktor surfer eller står på vannski en dag vil han aldri bade igjen. Derfor vil $(M^k)_{31}$ og $(M^k)_{32}$ være lik 0 for alle $k \geq 1$. Med andre ord finnes det ingen k hvor alle elementene til M^k er positive, så M er ikke regulær.

Eventuelt kan man se fullstendig matriseregnerisk på det: Hvis man forsøker å gange sammen M med seg selv et par ganger, legger man merke til at de to nullene i nederste rad ikke forsvinner. Dette gjør at man tenke at det kanskje er et system i det, og dét er det: Gitt matriser A, B på formen $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, vil alltid produktet AB være på samme form, noe man kan se med en enkel utregning. Siden M er slik vil altså også $M^2 = MM$ være slik, og da er også $M^3 = M(M^2)$ slik, osv. Ved induksjon vil enhver M^k ha minst to nuller, så M er ikke regulær.

b) Vi har at $\det(\lambda I - M) = (\lambda - 1/3)(\lambda^2 - 2\lambda/3 - 1/3)$. Hvis vi bruker abc-formelen finner vi røttene $\frac{2/3 \pm \sqrt{4/9 + 4/3}}{2} = 1/3 \pm 2/3$. Så egenverdiene til M er $1/3$, $-1/3$, og 1.

Likevektsvektoren vil være en egenvektor med egenverdi 1. Vi finner denne ved å radredusere $M - I$:

$$M - I = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir at egenvektoren er på formen $\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$. For at dette skal være en sannsynelighetsvektor må vi velge $s = 1/2$. Altså blir likevektsvektoren $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) For at vi ikke skal ha en unik likevektsvektor trenger vi at egenrommet til 1 er minst 2-dimensjonalt. For eksempel har $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ både $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

som likevektsvektor. Et annet eksempel kan være $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ som har både $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som likevektsvektor.

Oppgave 9 La $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{bmatrix}$ (varianter $(p, q) = (-2, 3), (-4, -3), (1, 6), (-5, -6)$)

a) Skisser fasediagrammet til differensialligningen $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$.

b) Finn alle løsninger av likningen $y'' - py' - qy = 0$.

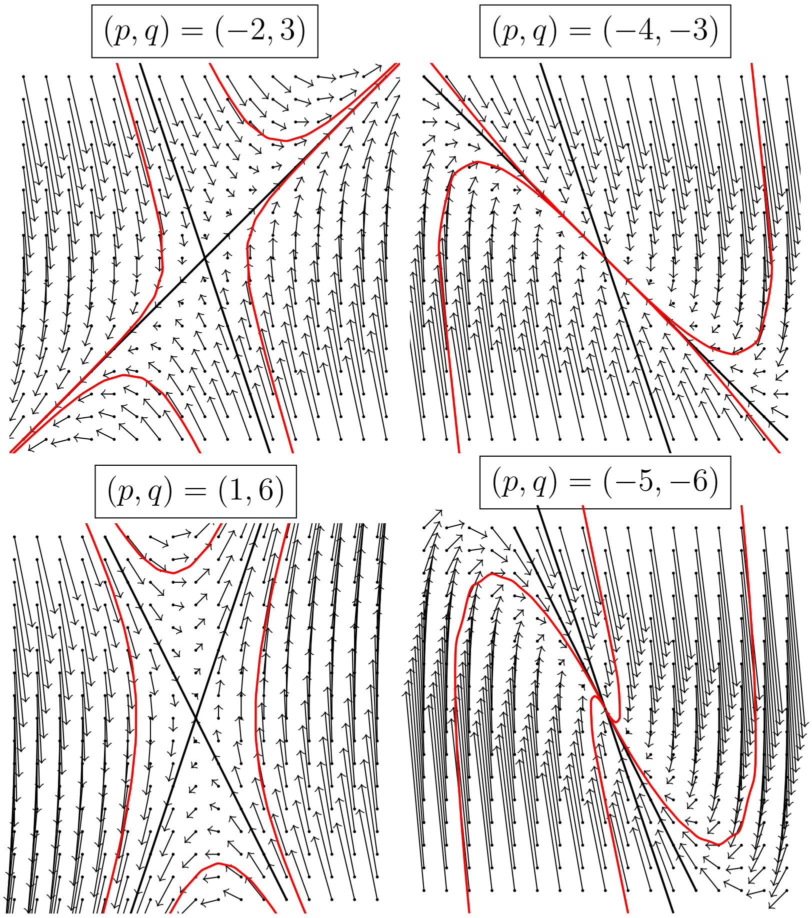
c) Finn en løsning av likningen $y'' - py' - qy = 2$, $y(0) = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, $y'(0) = -\frac{p}{q}$.

Løsning:

a) For å skissere fasediagrammet bør vi først finne egenverdiene og egenvektorene. Egenverdiene til A er røttene til $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - p\lambda - q$, som er lik $\frac{p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}$. For de ulike variantene blir egenverdiene hendholdsvis $(1, -3)$, $(-1, -3)$, $(3, -2)$, $(-2, -3)$.

Vi finner egenvektorene ved å løse $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$, i de ulike variantene får vi da hendholdsvis $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$, og $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$.

For å skissere fasediagrammet tegner vi kurver som beveger seg innover langs egenvektorer med negativ egenverdi og utover langs de med positiv egenverdi. Over tid bør kurvene bli mer parallelle med den egenvektoren med størst egenverdi. Vi får skisser som ser ut som hendholdsvis



b) Vi har at y er en løsning av $y'' - py' - qy = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ er en løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Den generelle løsningen av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ er gitt ved $\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ der $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorene vi fant i a) med egenverdier λ_1 og λ_2.

Den generelle løsningen blir da $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

c) Vi begynner med å finne en partikulærløsning. Metode for ubestemte koeffisienter tilsier at vi bør prøve en konstant funskjon $y(t) = A$. Putter vi en slik y inn i difflikningen får vi $-qA = 2$, så $y_p(t) = -\frac{2}{q}$ er en partikulær løsning.

En generell løsning blir da på formen $y(t) = -\frac{2}{q} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, med $y'(t) =$

$c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$. For å finne løsningen må vi da bare løse systemet

$$-\frac{2}{q} + c_1 + c_2 = y(0) = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$
$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y'(0) = -\frac{p}{q}$$

Løsningene blir

$$c_2 = -\frac{\lambda_1(p^2+2q)+pq}{q^2(\lambda_2-\lambda_1)} = \frac{1}{\lambda_2^2}$$
$$c_1 = \frac{p^2+2q}{q^2} - c_2 = \frac{1}{\lambda_1^2},$$

så løsningen på initialverdiproblemet blir $y(t) = -\frac{2}{q} + \frac{1}{\lambda_1^2}e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2^2}e^{\lambda_2 t}$.

Oppgave 10 I hver deloppgave: Finn et eksempel, eller forklar hvorfor det ikke finnes et eksempel.

a) To 2×2-matriser A og B, slik at $AB = 0$, men $BA \neq 0$, der 0 betegner 2×2-nullmatrisen.

b) En 2×2-matrise som ikke er diagonaliserbar og ikke inverterbar.

c) En reell 2×2-matrise som har to komplekse egenverdier z og $\overline{z}$, der $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

d) En 2×2-matrise som oppfyller $A^2 \neq 0$ og $A^3 = 0$.

e) En 3×3-matrise som oppfyller $A^2 \neq 0$ og $A^3 = 0$.

Løsning:

a) Det er mange måter å løse denne oppgaven på, men vi ønsker alltid å regne minst mulig, så hvordan burde vi da gå frem? Vi ønsker oss matriser slik at $AB = 0$, og de enkleste matrisene som oppfyller den egenskapen, er de som allerede inneholder mange nuller. På den annen side skal $BA \neq 0$, så vi kan ikke bruke nullmatrisen. Vi prøver oss med det enkleste, sett $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$. Når vi nå skal finne en B, ser vi at så lenge den øverste raden i B er lik 0, så blir $AB = 0$. Det er en god start, for det betyr at vi kan velge den nederste raden i B fritt, og forhåpentligvis ende opp med $BA \neq 0$. Ved å igjen prøve enkleste mulighet, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ser vi at vi er kommet i mål, ved å regne ut $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Vi vet at hvis en 2×2-matrise har to forskjellige egenverdier, så kan den diagonaliseres, så første instinkt er å finne en matrise med kun én egenverdi. Fordi vi ønsker at matrisen også skal være ikke-inverterbar, må vi velge egenverdien til å være 0 (det er kjent fra en øving at en matrise er ikke-inverterbar hvis og bare hvis den har 0 som en egenverdi). Hvordan lager man enklest matriser med ønskede egenverdier? Man putter dem på diagonalen i en triangulærmatrise. Vi setter altså $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Det enkleste eksempelet kommer når $a = 0$, og A er nullmatrisen, men den er diagonal, og derfor diagonaliserbar. Hvordan viser man at en matrise er ikke-diagonaliserbar? Man må vise at egenrommene ikke har stor nok multiplisitet. Her har vi egenverdien 0 med algebraisk multiplisitet 2, så vi sjekker den geometriske. Det betyr å finne dimensjonen til nullrommet til $A - \lambda I = A$, og dette nullrommet ser man at er 1-dimensjonalt så lenge $a \neq 0$. Altså kan vi for eksempel velge oss $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Vi ønsker oss komplekse egenverdier, altså et karakteristisk polynom med komplekse røtter. Hva er det enkleste slike polynomet vi kan tenke oss? Jeg vil si det er $\lambda^2 + 1$, fordi vi godt vet at $\lambda^2 + 1 = 0$ har i og $-i$ som løsninger. Kan vi lage oss en matrise som har dette polynomet som sitt karakteristiske polynom? Ja, vi kan skaffe λ^2-delen ved å gjøre diagonalen enkel, og bruke de to siste elementene til å skaffe 1, så etter litt skribling setter vi $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

En annen metode er å tenke på rotasjonsmatrisene som dukket opp i en øving, vi viste der at en rotasjonsmatrise kun har reelle egenverdier om rotasjonsvinkelen er 0 eller π, så enhver rotasjonsmatrise med annen vinkel vil løse oppgaven (matrisen vi kom frem til her er faktisk rotasjon med $\frac{3\pi}{2}$)

d) Dette er ikke mulig. La $\mathbf{x}$ være en vektor i $\mathbb{R}^2$ slik at $A^2\mathbf{x} \neq 0$. Siden $A(A^2\mathbf{x}) = A^3\mathbf{x} = \mathbf{0}$, må nullrommet til A være minst 1-dimensjonalt. Rank-Nullity teoremet gir oss da at bildet til A har dimensjon max $2 - 1 = 1$. Siden $A\mathbf{x}$ og $A^2\mathbf{x}$ begge er i bildet, og er forskjellig fra null, finnes det en ikkenull skalar λ slik at $A^2\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x}$. Men da vil $A^3\mathbf{x} = A(A^2\mathbf{x}) = A(\lambda A\mathbf{x}) = \lambda A^2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dette er en motsigelse til at $A^3 = 0$.

e) Når vi har tre dimensjoner å leke med, er det faktisk mulig. En ting det kan være lurt å merke seg er at matriser som kun har nullelementer over diagonalen (altså øvre triangulærmatriser med null på diagonalen) blir mer og mer nullete når de ganges sammen. Vi bruker den ekstra plassen tre dimensjoner gir oss og prøver $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Den oppfyller kravet.

Hvis du synes dette er litt vel dratt opp av hatten, kan du tenke på derivasjon av polynomer. Vi vet at derivasjon av polynomer er en lineærtransformasjon, og hvis vi holder oss til andregradspolynomer, er det en lineærtransformasjon $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, altså en 3×3-matrise. Vi vet også at derivasjon dreper alle polynomer når det gjøres mange nok ganger, andregradspolynomer drepes faktisk av kun tre derivasjoner, så A^3 er nødt til å være nullmatrisen. Men det finnes andregradspolynomer som overlever to derivasjoner, e.g. $(x^2)'' = 2$, altså kan ikke A^2 være nullmatrisen. Matrisen som representerer derivasjon av andregradspolynomer er altså en løsning av oppgaven, og ligner veldig på den vi fant.