NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4115 Matematikk 3 (Prøveeksamen - LF)

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 13

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Systemet har med andre ord løsningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2 Et system har totalmatrise med redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 4 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

som gir en fri variabel $z = s$, i tillegg til $y = b - 4s$ og $x = a - 2s$. Systemet har altså uendelig mange løsninger.

Oppgave 3 Systemet som har totalmatrise med redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

har nøyaktig én løsning, nemlig løsningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4 Vi løser denne på vanlig måte med kofaktorekspansjon.

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\right) &= 2\cdot\det\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)\\ &- 1\cdot\det\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\right)\\ &+ 1\cdot\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)\\ &= 0+2-1=1\end{aligned}$$

Oppgave 5 Her kan vi sette opp matrisen ved siden av identitensmatrisen og radredusere til vi får identitensmatrisen på venstresiden. Etter noen radoperasjoner vil man få

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Det vil si at

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Husk at det alltid går an å sjekke om svaret gir mening ved å regne ut AA^{-1} og se om produktet blir identitetsmatrisen.

I Oppgave 6-8 er A en reell $n\times n$-matrise.

Oppgave 6 Hvis $\det(A)\neq 0$ vil A være radekvivalent med I_n ($n\times n$ identitetsmatrisen), så påstanden er *sann*.

Oppgave 7 Påstanden er at hvis $\det(A)=0$, så må en av radene i A være et multiplum av en annen rad. Dette er *usant*. Et moteksempel er f.eks.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Oppgave 8 Påstanden er at hvis A er en øvre triangulær matrise, så har A en øvre triangulær invers. Dette er *usant*. Et moteksempel er nullmatrisen, som er øvre triangulær, men den har ikke en invers i det hele tatt. Følgelig har den heller ingen øvre triangulær invers.

Merk at hvis vi i tillegg hadde krevd at A er inverterbar, så ville påstanden vært sann. La oss prøve å bevise det. La A være en øvre triangulær matrise med invers A^{-1}. La $A^{-1} = [\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}\ \cdots\ \mathbf{x_n}]$ der hver $\mathbf{x_i}$ er en kolonnevektor (eller $n \times 1$-matrise). Per definisjon vil

$$AA^{-1} = I_n = [\mathbf{e_1}\ \cdots\ \mathbf{e_n}],$$

der hver $\mathbf{e_i}$ er den i'te standardbasisvektoren (elementet i posisjon i er 1, resten er 0). Videre ser vi at

$$AA^{-1} = A[\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}\ \cdots\ \mathbf{x_n}] = [A\mathbf{x_1}\ A\mathbf{x_2}\ \cdots\ A\mathbf{x_n}],$$

så $A\mathbf{x_i} = \mathbf{e_i}$ for $1 \le i \le n$. Nå, siden $\mathbf{e_i}$ har bare nuller under den i'te raden, og A er øvre triangulær, og $A\mathbf{x_i} = \mathbf{e_i}$, så må $\mathbf{x_i}$ også bare ha nuller under den i'te raden. Siden $A^{-1} = [\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}\ \cdots\ \mathbf{x_n}]$, betyr det at A^{-1} er øvre triangulær.

I Oppgave 9-10 er A og B inverterbare $n \times n$-matriser.

Oppgave 9 Påstanden er at $A + B$ alltid er inverterbar. Dette er *usant*. Et moteksempel er f.eks.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Begge disse er inverterbare, men

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er ikke det.

Oppgave 10 Påstanden er at $A \cdot B^\top$ alltid er inverterbar. Dette er *sant*. En matrise er inverterbar hvis og bare hvis den har determinant ulik 0. Siden både A og B er inverterbare, er $\det(A) \neq 0$ og $\det(B) \neq 0$. Dermed er også $\det(B^\top) \neq 0$ siden $\det(B^\top) = \det(B)$. Videre må da $\det(A \cdot B^\top) \neq 0$ siden $\det(A \cdot B^\top) = \det(A) \cdot \det(B^\top)$. Siden determinanten ikke er null, er $A \cdot B^\top$ inverterbar.

I Oppgave 11-13 skal vi undersøke om mengdene er underrom av $\mathbb{R}^3$. Vi må sjekke tre ting:

1. Er $\mathbf{0}$ med i mengden?
2. Lukket under addisjon?
3. Lukket under skalarmultiplikasjon?

Oppgave 11 La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x \leq y \leq z \right\}.$$

Hvis vi ganger med en skalar $c < 0$ får vi en vektor der $cx \geq cy \geq cz$, som ikke er med i mengden. Dette er altså ikke et underrom av $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 12 La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid |x| \leq |y| \leq |z| \right\}.$$

Dette er *ikke* et underrom. Se f. eks. på vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{v}_1$ er i mengden fordi $|0| \leq |0| \leq |-1|$, og elementene i $\mathbf{v}_2$ er alle like. Men

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ligger ikke i mengden da $|1| > |0|$. Mengden er dermed ikke lukket under addisjon.

Oppgave 13 La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x + y = z \right\}.$$

1. $\mathbf{0} \in V$ fordi $0 + 0 = 0$
2. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = z_1 + z_2$, så $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ er med i mengden.
3. $cx + cy = c(x + y) = cz$, så $c \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ er i mengden.

Alle punktene er OK, så V er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

I Oppgave 14-15 antar vi at A er matrise med redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 14 Siden A har to pivotelementer er $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$.

Oppgave 15 Det er to kolonner uten pivotelement, så $\dim(\mathrm{Null}(A)) = 2$.

I Oppgave 16-18 skal vi undersøke om funksjonene er lineærtransformasjoner. Det er to ting som må være sant:

1. $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$,
2. $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$ for en skalar c.

Oppgave 16 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ s.a.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-1 \end{bmatrix},$$

men

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-2 \end{bmatrix},$$

så dette er ikke en lineærtransformasjon.

Oppgave 17 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s.a.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^x \\ 2y \end{bmatrix}\right).$$

Dette er ikke en lineærtransformasjon fordi $3^{x_1+x_2} \neq 3^{x_1} + 3^{x_2}$.

Oppgave 18 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s.a.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x+y-z.$$

Vi har at

$$\begin{aligned} &T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1+y_1-z_1) + (x_2+y_2-z_2) \\ &= (x_1+x_2) + (y_1+y_2) - (z_1+z_2) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Videre har vi at

$$T\left(c\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = cx + cy - cz$$
$$= c(x + y - z)$$
$$= cT\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right).$$

Det betyr at T er en lineærtransformasjon.

I Oppgave 19-20 er V og W vektorrom slik at $\dim V = 3$ og $\dim W = 4$.

Oppgave 19 Påstanden er at det finnes ingen surjektiv lineærtransformasjon $T : V \to W$. Dette er *sant.* Hvis T er surjektiv så er $\operatorname{im} T = W$. Men vi vet at $\dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T) = \dim V$, som betyr at bildet til T maksimalt kan ha dimensjon 3. Men W har dimensjon 4 og dermed må $\operatorname{im} T \neq W$, så T er ikke surjektiv.

Oppgave 20 Påstanden er at enhver lineærtransformasjon $T : V \to W$ er injektiv. Dette er *usant.* De finnes, riktignok, men ikke alle er injektive. Et moteksempel er f.eks. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ s.a.

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Her ser vi at kjernen består av mer enn bare $\mathbf{0}$ og dermed er ikke T injektiv.

I Oppgave 21-23 lar vi

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Oppgave 21 Er A diagonaliserbar? La oss først finne egenverdiene til A. $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2$, så A har egenverdi $\lambda = 1$ med algebraisk multiplisitet 2. Vi finner så egenvektor(er) tilhørende $\lambda = 1$ ved å løse $(\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for $\lambda = 1$. Det gir oss at egenrommet er utspent av $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ og har altså dimensjon 1. Dermed er ikke A diagonaliserbar.

Oppgave 22 Vi finner egenverdiene til B på vanlig måte:

$$\det(\lambda I - B) = (\lambda - 2)(\lambda - 1),$$

så B har egenverdiene $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1$.

Oppgave 23 Matrisen som diagonaliserer B har egenvektorer for B som kolonnevektorer. Vi løser $(\lambda I - B)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1$ og får tilhørende egenvektorer henholdsvis

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En passende matrise er dermed

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 24 A er en 3×3-matrise med egenverdi 3. La $\mathbf{v}$ være en tilhørende egenvektor. Da vil

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(3\mathbf{v}) = 3(A\mathbf{v}) = 3(3\mathbf{v}) = 9\mathbf{v}.$$

Altså har A^2 egenverdi 9.

Oppgave 25 La T være lineærtransformasjonen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer en vektor med α radianer der $0 < \alpha < \pi$. At T har reelle egenverdier betyr at $T(\mathbf{v})$ ligger et sted langs linja spent ut av $\mathbf{v}$. Dette skjer hvis det er en rotasjon på $k\pi$ radianer for et heltall k. Med andre ord er det ikke tilfelle når rotasjonen er på α radianer, $0 < \alpha < \pi$, så riktig svar er at T *ikke* har reelle egenverdier.

I Oppgave 26-30 er A en reell 3×3-matrise og B er en reell 2×2-matrise.

Oppgave 26 Påsatnden er at A alltid har minst én reell egenverdi. Dette er *sant*. Det karakteristiske polynomet til A, $\det(\lambda I - A)$, vil være av grad 3, og et polynom av odde grad vil alltid ha minst én reell rot. Dermed vil A ha minst én reell egenverdi.

Oppgave 27 Påstanden er at B alltid har minst én reell egenverdi. Dette er *usant*. I motsetning til i forrige oppgave vil det karakteristiske polynomet være av grad 2, og et slikt polynom trenger ikke å ha reelle røtter. Et eksempel på en 2×2-matrise uten reelle egenverdier er

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 28 Påstanden er at det alltid finnes en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A. Dette er *usant*. Hvis det skulle vært sant måtte alle 3×3-matriser A ha tre lineært uavhengige egenvektorer. Et eksempel på en matrise som ikke har det er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen har egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. λ_1 har algebraisk multiplisitet 2, men det tilhørende egenrommet er éndimensjonalt. Dermed utgjør ikke egenvektorene en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 29 Påstanden er at hvis 0 er en egenverdi for A, så er A ikke inverterbar. Dette er *sant*. Hvis 0 er en egenverdi finnes det en ikke-null vektor $\mathbf{v}$ s.a. $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Med andre ord har ligningen $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ikke-trivielle løsninger, og det skjer hvis og bare hvis A ikke er inverterbar.

Oppgave 30 Påstanden er at hvis 1 er en egenverdi for B, vil B være inverterbar. Dette er *usant*. La oss se på matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen har egenverdier 0 og 1, men $\det(B) = 0$, så B er ikke inverterbar.

Oppgave 31 Vi har lyst til å skrive $z = 2 + 2i = a + bi$ på formen $z = re^{i\theta}$. Vi har at

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

og

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Dermed er

$$z = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Oppgave 32 Ligningen $z^4 + 1 = 0$ har løsningene $\pm(-1)^{1/4}$ og $\pm(-1)^{3/4}$, så det er totalt 4 løsninger.

Oppgave 33 Påstanden er at hvis en kompleks matrise har egenverdi $\lambda \in \mathbb{C}$, vil $\overline{\lambda}$ også være en egenverdi. Dette er *usant*. Litt omformulert er påstanden at røttene til et polynom med komplekse koeffisienter kommer i konjugatpar, og svaret er nei, det trenger de ikke å gjøre. Et eksempel på en kompleks matrise der egenverdiene ikke kommer i konjugatpar er

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$

der i er eneste egenverdi.

Oppgave 34 Påstanden er at hvis en reell matrise har egenverdi $\lambda \in \mathbb{C}$, vil $\overline{\lambda}$ også være en egenverdi. Dette er *sant*. Det er fordi komplekse røtter til et polynom med reelle koeffisienter kommer i konjugatpar. Et bevis for dette finner dere i Anbefalte oppgaver 1.

Oppgave 35 Påstanden er at komplekse 3×3-matriser alltid er diagonaliserbare. Med andre ord, vil de alltid ha tre uavhengige egenvektorer? Dette er *usant*. Et eksempel på en kompleks 3×3-matrise som ikke er diagonaliserbar er

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}.$$

I Oppgave 36-37 lar vi $\mathcal{P}$ være planet gitt ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x - y - z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Oppgave 36 Vi skal finne ut hvilket av alternativene som utgjør en ortogonal basis for $\mathcal{P}$. Vi ser at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oppfyller ligningen for planet, står vinkelrett på hverandre og er lineært uavhengige, så disse er et godt alternativ. Ingen av de andre alternativene oppfyller alle kravene.

Oppgave 37 La

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

være en basis for planet $\mathcal{P}$, og la

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Minste avstand fra punktet til planet finner vi ved å projisere $\mathbf{v}$ ned på planet, og finne lengden av differansen mellom $\mathbf{v}$ og $P_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$. Vi har at

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) &= P_{\mathbf{b_1}}(\mathbf{v}) + P_{\mathbf{b_2}}(\mathbf{v}) \\ &= \frac{\langle \mathbf{b_1}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{b_1}, \mathbf{b_1} \rangle}\mathbf{b_1} + \frac{\langle \mathbf{b_2}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{b_2}, \mathbf{b_2} \rangle}\mathbf{b_2} \\ &= \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Det gir videre at

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} - P_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Avstanden vi er ute etter blir altså

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Angitt som desimaltall med tre desimaler er svaret 0.577.

Oppgave 38 Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y_1' = 2y_1 + y_2,\ y_2' = y_2,\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = -1.$$

Det vil si at vi skal løse systemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},\ \text{der } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A har egenverdier 2 og 1 med tilhørende egenvektorer henholdsvis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. En generell løsning er dermed

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t},$$

eller

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^t \\ y_2(t) &= -c_2 e^t. \end{aligned}$$

Initialverdiene gir

$$\begin{aligned} y_2(0) &= -c_2 = -1 \Rightarrow c_2 = 1 \\ y_1(0) &= c_1 + c_2 = c_1 + 1 = 2 \Rightarrow c_1 = 1. \end{aligned}$$

Dermed er løsningen

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2t} + e^t \\ y_2 &= -e^t. \end{aligned}$$

Oppgave 39 Vi lar G betegne Gløshaugen, D betegne Dragvoll og K betegne Kalvskinnet. Vi sorterer informasjonen i en tabell der vi uttrykker sannsynlighetene ved desimaltall:

foreldre ved	G	D	K	**gir barn ved**
	0.8	0.2	0.3	G
	0	0.7	0.3	D
	0.2	0.1	0.4	K

.

Dette gir opphav til en transisjonsmatrise:

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix},$$

hvor elementet øverst til venstre angir sannsynligheten for at barn av en Gløshaugen-student også blir Gløshaugen-student. For å finne sannsynligheten for at også neste generasjon blir Gløshaugen-student må vi kvadrere matrisen:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.33 & 0.42 \\ 0.06 & 0.52 & 0.33 \\ 0.24 & 0.15 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Dermed er sannsynligheten 0.7 eller 70%.

Oppgave 40 La A være en diagonaliserbar matrise med reelle egenverdier. Anta at $A^4 = A$. Siden A er diagonaliserbar kan vi skrive $A = PDP^{-1}$ og $A^4 = PD^4P^{-1}$. Her er D matrisen som har egenverdiene til A på diagonalen og resten av elementene er 0. Siden $A^4 = A$ har vi også at $PD^4P^{-1} = PDP^{-1}$, som kan forkortes til $D^4 = D$. Dermed må alle elementene på diagonalen til D, la oss kalle dem d_i, være slik at $d_i^4 = d_i$ for alle i. De eneste reelle løsningene til denne ligningen er 0 og 1. Men det betyr at også $d_i^2 = d_i$ for alle i, og dermed er $D^2 = D$, eller $PD^2P^{-1} = PDP^{-1}$, som i sin tur betyr at $A^2 = A$, som var det som skulle vises.