

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 2018

Eksamenstid (fra–til): 00:00 - 24:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C: Bestemt, enkel kalkulator, og vedlagte formelark.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes. Valgfritt programmeringsspråk i programmeringsoppgaver. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig <input type="checkbox"/>	2-sidig <input checked="" type="checkbox"/>
sort/hvit <input checked="" type="checkbox"/>	farger <input type="checkbox"/>
skal ha flervalgskjema <input type="checkbox"/>	

Dato

Sign

Oppgave 1

a) Vi skriver først

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Venstresiden kan vi skrive enkelt som

$$z^2(z + 1) + z + 1 = (z + 1)(z^2 + 1),$$

og da ser vi umiddelbart at løsningene må være $z = 1 = e^{0i}$, $z = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ og $z = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$. Siden polynomlikningen har orden 3, gir algebraens fundamentalteorem at dette er alle løsninger av likningen.

b) $e^{it} = \cos t + i \sin t$

c) $e^{z+w} = e^z e^w$

d) Vi skriver

$$(a + bi)^2 + p(a + bi) + q = a^2 - b^2 + 2abi + pa + pbi + q = 0$$

Splitter vi denne likningen i real- og imaginærdel, ser vi at $pb = -2ab$, altså at $p = -2a$, og videre at $-2a^2 + q = pa + q = b^2 - a^2$, slik at $q = a^2 + b^2$. Siden p og q er reelle tall, kommer løsningene til

$$z^2 + pz + q = 0$$

i komplekskonjugerte par. Dette betyr at for det første at den andre løsningen er $\bar{z} = a - bi$, og for det andre at

$$\bar{z}^2 + p\bar{z} + q = 0$$

har de samme løsningene. Våre valg $p = -2a$ og $q = a^2 + b^2$ gir altså både $z^2 + pz + q = 0$ og $\bar{z}^2 + p\bar{z} + q = 0$.

Oppgave 2

a) Her kan vi gå rett i tilbakesubstitusjon, og beregne $z = 5$, $y = (51 - 9 \cdot 5)/8 = 3/4$, $x = (63 - 6 \cdot 6 - 7 \cdot 5)/5 = 47/10$ og $t = 23 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = -173/20$.

- b) Siden A er en 4×7 -matrise, ser vi at $p = 7$ og $q = 4$. En basis for nullrommet til A finner vi ved å løse likningene

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 + x_7 &= 0 \\x_5 + x_6 &= 0 \\x_6 + x_7 &= 0\end{aligned}$$

Kolonnerommet til A er tredimensjonalt. Siden dimensjonen på kolonnerommet og dimensjonen på nullrommet må summere til syv, ser vi at vi må ha fire frie variable. Vi kan for eksempel velge $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$ og $x_7 = v$, og få

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -t - v \\ t \\ u \\ v \\ -v \\ v \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

- a) De to første vektorene er ikke parallelle. To vektorer som ikke er parallelle er lineært uavhengige. To lineært uavhengige vektorer i \mathbb{R}^2 spenner ut \mathbb{R}^2 , siden alle vektorer i \mathbb{R}^2 kan skrives som en lineærkombinasjon av dem på en entydig måte.
- b) Disse vektorene er ikke parallelle, og derfor lineært uavhengige. Siden det er to lineært uavhengige vektorer, er utspennet todimensjonalt.
- c) Vektorene v_1, v_2, \dots, v_n er en basis for V dersom de er lineært uavhengige og spenner ut V .

Oppgave 4

- a)

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x+a & ay & 0 \\ 0 & 1 & y+b & bz \\ 0 & 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Det blir vel

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & ab & -abc \\ 0 & 1 & -b & bc \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Her er det enklest å først bytte plass på kolonne 1 og 2, deretter bytte plass på kolonne 3 og 4, observere at resultatet blir en diagonalmatrise, og ta produktet av diagonalelementene. Siden det er to kolonnebytter, opphever fortegnssbyttene hverandre, og vi får

$$\det \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix} = bcxy.$$