NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 2018

Eksamenstid (fra–til): 00:00 - 24:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C: Bestemt, enkel kalkulator, og vedlagte formelark.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes. Valgfritt programmeringsspråk i programmeringsoppgaver. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Vi skriver først

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Venstresiden kan vi skrive enkelt som

$$z^2(z+1) + z + 1 = (z+1)(z^2+1),$$

og da ser vi umiddelbart at løsningene må være $z = 1 = e^{0i}$, $z = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ og $z = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$. Siden polynomlikningen har orden 3, gir algebraens fundamentalteorem at dette er alle løsninger av likningen.

b) $e^{it} = \cos t + i \sin t$

c) $e^{z+w} = e^z e^w$

d) Vi skriver

$$(a+bi)^2 + p(a+bi) + q = a^2 - b^2 + 2abi + pa + pbi + q = 0$$

Splitter vi denne likningen i real- og imaginærdel, ser vi at $pb = -2ab$, altså at $p = -2a$, og videre at $-2a^2 + q = pa + q = b^2 - a^2$, slik at $q = a^2 + b^2$. Siden p og q er reelle tall, kommer løsningene til

$$z^2 + pz + q = 0$$

i komplekskonjugerte par. Dette betyr at for det første at den andre løsningen er $\overline{z} = a - bi$, og for det andre at

$$\overline{z}^2 + p\overline{z} + q = 0$$

har de samme løsningene. Våre valg $p = -2a$ og $q = a^2 + b^2$ gir altså både $z^2 + pz + q = 0$ og $\overline{z}^2 + p\overline{z} + q = 0$.

Oppgave 2

a) Her kan vi gå rett i tilbakesubstitusjon, og beregne $z = 5$, $y = 51 - 9 \cdot 5 = 6$, $x = 63 - 6 \cdot 6 - 7 \cdot 5 = -8$ og $t = 23 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 1$.

b) Siden A er en 4×7-matrise, ser vi at $p = 7$ og $q = 4$. En basis for nullrommet til A finner vi ved å løse likningene

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_7 &= 0 \\ x_5 + x_6 &= 0 \\ x_6 + x_7 &= 0 \end{aligned}$$

Kolonnerommet til A er tredimensjonalt. Siden dimensjonen på kolonnerommet og dimensjonen på nullrommet må summere til syv, ser vi at vi må ha fire frie variable. Vi kan for eksempel velge $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$ og $x_7 = v$, og få

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -t-v \\ t \\ u \\ v \\ -v \\ v \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

a) De to første vektorene er ikke parallelle. To vektorer som ikke er parallelle er lineært uavhengige. To lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^2$ spenner ut $\mathbb{R}^2$, siden alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en lineærkombinasjon av dem på en entydig måte.

b) Disse vektorene er ikke parallelle, og derfor lineært uavhengige. Siden det er to lineært uavhengige vektorer, er utspennet todimensjonalt.

c) Vektorene v_1, v_2... v_n er en basis for V dersom de er lineært uavhengige og spenner ut V.

Oppgave 4

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x+a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y+b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Vi tar en titt på forrige oppgave, og velger $x = -a$, $y = -b$ og $z = -c$. Da ser vi at

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Altså er

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Her er det enklest å først bytte plass på kolonne 1 og 2, deretter bytte plass på kolonne 3 og 4, observere at resulatet blir en diagonalmatrise, og ta produktet av diagonalelementene. Siden det er to kolonnebytter, opphever fortegnsbyttene hverandre, og vi får

$$\det \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix} = bcxy.$$