Kapittel 13

Systemer av differensialligninger

I dette kapittelet skal vi bruke det vi har lært om lineær algebra til å studere systemer av differensialligninger.

Vektorfunksjoner

En *vektorfunksjon* er en funksjon $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix},$$

der alle komponentene er funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Det er vanlig å tenke på en vektorfunksjon som en kurve i $\mathbb{R}^n$; en bane som en partikkel beveger seg langs når tiden t øker. Du oppfordres til å skissére eksemplene nedenfor.

Eksempel 13.1. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

tegner enhetssirkelen – uendelig mange ganger – i $\mathbb{R}^2$. Den fysiske tolkningen er en partikkel som beveger seg rundt origo langs enhetssirkelen i det uendelige. △

Eksempel 13.2. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$$

tegner en spiralfjær langs z–aksen. Den er uendelig lang. △

Eksempel 13.3. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er konstant lik $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Den fysiske tolkningen her er at en partikkel i $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ikke beveger seg når tiden øker. △

Eksempel 13.4. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

tegner den rette linjen utspent av vektoren

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. △

Eksempel 13.5. Vektorfunksjonen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

tegner den delen av linjen i forrige eksempel som ligger i første kvadrant. Forskjellen er at e^t tar på seg verdier i $(0, \infty)$ mens t går fra $-\infty$ til $+\infty$. △

For å kunne bruke språket vi har lært i løpet av semesteret – språket som er lineær algebra – må vi jobbe med vektorrom. Husk at $\mathbb{R}^n$ og funksjoner fra reelle tall til reelle tall er vektorrom. En vektorfunksjon er jo bare en kombinasjon av disse. Derfor kan vi definere et vektorrom med addisjon

$$\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) + x_1(t) \\ y_2(t) + x_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) + x_n(t) \end{bmatrix},$$

og skalarmultiplikasjon

$$c\mathbf{f}(t) = c \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cy_1(t) \\ cy_2(t) \\ \vdots \\ cy_n(t) \end{bmatrix}.$$

Oppsummering:

Vektorfunksjoner utgjør et vektorrom.

Merk. I praksis fungerer addisjon og skalarmultiplikasjon som i $\mathbb{R}^n$, men nå er det en variabel t i hver komponent.

Eksempel 13.6.

$$\begin{bmatrix} 2\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t + t^2 \\ -\sin t + \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t + t^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

△

Eksempel 13.7. Man kan eksempelvis skrive

$$2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

i stedet for
$$\begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix}.$$
△

Definisjon. Vi definerer den *deriverte* av $\mathbf{y}$ som
$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}.$$

Eksempel 13.8.
$$\begin{bmatrix} t^2 \\ \cos t \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} (t^2)' \\ (\cos t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$
△

Systemer av differensialligninger

I dette kapittelet skal
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
alltid være en reell matrise. Det blir mer enn komplisert nok. Et *førsteordens lineært og homogent system av differensialligninger med konstante koeffisienter* er et sett med n ligninger og n ukjente
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) \end{aligned}$$
Dette kan alternativt skrives
$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}.$$
På kortform skriver vi enkelt og greit
$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$
Den lange tittelen forkortes til *system.* Vi kan allerede regne på et enkelt eksempel.

Eksempel 13.9. La
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
med tilhørende system
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$
Dette er jo bare to differensialligninger á la matematikk 1:
$$\begin{aligned} y_1(t)' &= y_1(t) \\ y_2(t)' &= 0. \end{aligned}$$
Du husker kanskje at den første har løsning $y_1(t) = c_1e^t$ hvor c_1 er en konstant; den andre har løsning c_2 hvor c_2 er en konstant. Derfor løser i alle fall $\begin{bmatrix} c_1e^t \\ c_2 \end{bmatrix}$ systemet for alle valg av c_1 og c_2. Hvordan kan vi sjekke dette? Sett inn, sjekk at venstre side er lik høyre side:
$$\begin{bmatrix} c_1e^t \\ c_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} c_1e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1e^t \\ c_2 \end{bmatrix}$$
Vi kan også sjekke om vektorfunksjoner ikke løser systemet på denne måten. Eksempelvis løser ikke $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$ systemet fordi
$$\begin{aligned} (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t)' &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \\ &\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t. \end{aligned}$$
△

Siden matrisemultiplikasjon og derivasjon er lineære operasjoner får vi et resultat som ofte kalles *superposisjonsprinsippet* av fysikere og ingeniører.

Teorem 13.10 (superposisjonsprinsippet)**.** *Løsningene til*
$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$
utgjør et vektorrom. Det vil si at dersom $\mathbf{y}_1$ og $\mathbf{y}_2$ er løsninger av systemet, så er $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$ en løsning for alle reelle tall c_1 og c_2.

Bevis. Vi viser at løsningene utgjør et underrom av alle vektorfunksjoner. La $\mathbf{y}_1$ og $\mathbf{y}_2$ være to løsninger. Ønsket er at en vilkårlig lineærkombinasjon $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$ er en løsning igjen:
$$\begin{aligned} &(c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2)' && \\ =&c_1\mathbf{y}_1' + c_2\mathbf{y}_2' && \text{derivasjon er lineært} \\ =&c_1A\mathbf{y}_1 + c_2A\mathbf{y}_2 && \mathbf{y}_1 \text{ og } \mathbf{y}_2 \text{ er løsninger} \\ =&A(c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2) && \text{matrisemult. er lineært} \end{aligned}$$
□

Eksempel 13.11. I forrige eksempel så vi på det tilhørende systemet til
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Vi fant mange løsninger: $\begin{bmatrix} c_1e^t \\ c_2 \end{bmatrix}$ hvor c_1 og c_2 er valgfrie reelle tall. Teorem 13.10 forteller oss at denne informasjonen er lagret i det faktumet at vektorfunksjonene $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ løser systemet, fordi
$$\begin{bmatrix} c_1e^t \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
△

Eksempel 13.12. Se på systemet assosiert med matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeg vet hvordan man løser dette systemet, men du vet ikke det enda. Derfor gir jeg deg to løsninger:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Du kan sjekke at disse faktisk løser systemet:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}\right)' &= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}, \end{aligned}$$

og tilsvarende for $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$. Teorem 13.10 gir automatisk uendelig mange løsninger:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Vi skal se at dette faktisk er *alle* løsningene til systemet. △

Merk. Løsningene i eksemplene ovenfor er på formen $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ der $\mathbf{v}$ er en egenvektor til A med tilhørende egenverdi λ. Dette er ikke tilfeldig!

Definisjon. Et *initialverdiproblem* er et system sammen med et krav $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ hvor t_0 er et spesifikt reelt tall og $\mathbf{y}_0$ er en fiksert vektor i $\mathbb{R}^n$. △

Den fysiske tolkningen er at en partikkel som beveger seg i henhold til $\mathbf{y}(t)$ befinner seg i $\mathbf{y}_0$ når $t = t_0$.

Eksempel 13.13. Legg til kravet $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ til systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det er kjent – fra forrige eksempel – at vektorfunksjoner på formen

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

løser systemet. Vi søker en løsning på initialverdiproblemet blant disse. Kombiner utregningen

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3\cdot 0} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-1\cdot 0} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

med kravet $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ for å få matriseligningen

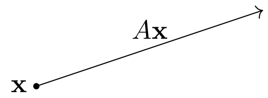
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denne bestemmer konstantene. Du er god på å løse slike ligninger på dette tidspunktet. Radreduser for å finne den entydige løsningen $c_1 = 1$ og $c_2 = 1$. En løsning på initialverdiproblemet er

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Vi skal se at denne løsningen er entydig/unik. △

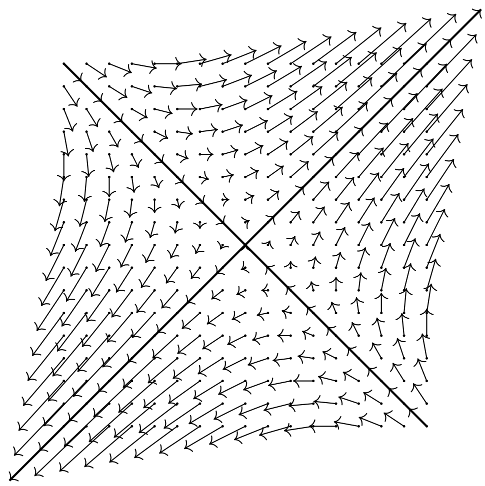
Før neste teorem skal vi tenke litt på en fysisk tolkning av initialverdiproblemer. Du oppfordres til å alltid ha $\mathbb{R}^2$ i bakhodet når du leser $\mathbb{R}^n$. Vi vet at en $n \times n$–matrise avbilder vektorer i $\mathbb{R}^n$ til vektorer i $\mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Denne informasjonen kan innebygges i $\mathbb{R}^n$ ved å tenke på A som et vektorfelt – noe du har lært om i matematikk 2: Ethvert punkt $\mathbf{x}$ tilordnes pilen $A\mathbf{x}$ med startpunkt i $\mathbf{x}$.



Vi tenker på $A\mathbf{x}$ som en pil med $\mathbf{x}$ som startpunkt

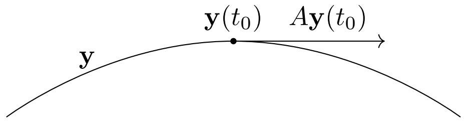
Eksempel 13.14. Her er en skisse av vektorfeltet assosiert til systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$



Aksene av fet type er linjene utspent av egenvektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som svarer til egenverdiene 3 og -1. Legg merke til hvordan pilene beveger seg mot uendelig langs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som svarer til positiv egenverdi; mot origo langs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som svarer til negativ egenverdi. Det er ikke meningen at du skal skjønne detaljene her, eksemplet er først og fremst en illustrasjon. Vi skal se hvordan alt dette henger sammen senere i kapittelet. △

Hvordan hjelper vektorfelt oss med å forstå løsningene til systemer? En løsning $\mathbf{y}$ av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er en kurve som tilfredstiller at den deriverte i et tidspunkt t_0 er gitt som $\mathbf{y}'(t_0) = A\mathbf{y}(t_0)$. Den deriverte er – med andre ord – pilen i $\mathbf{y}(t_0)$ fra vektorfeltet assosiert med A.



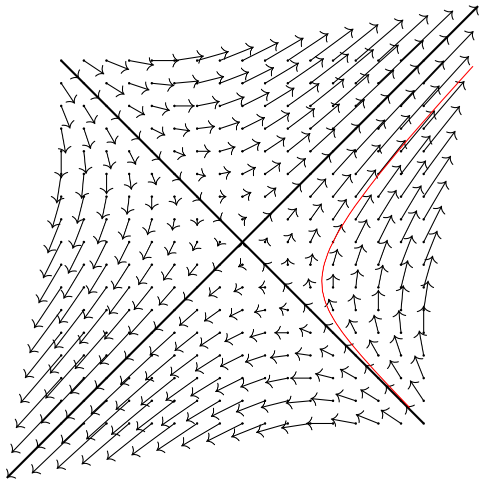
Pilen $A\mathbf{y}(t_0)$ er den deriverte til $\mathbf{y}$ i $t = t_0$

Derfor tangerer pilene løsningskurvene.

Eksempel 13.15. La oss tegne løsningen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

i figuren fra forrige eksempel:



Se hvor fint den følger flyten fra pilene. △

Fra eksemplet ovenfor ser vi klart at en løsning – som er en kurve i $\mathbb{R}^n$ – må følge pilene i vektorfeltet. Rent fysisk kan vi tenke på en partikkel som starter i et punkt $\mathbf{y}_0$ når $t = t_0$ for så å bevege seg langs for eksempel et kraftfelt. Basert på dette virker det ikke urimelig at det alltid finnes en entydig løsning på et initialverdiproblem. Dette motiverer neste resultat. Det formelle beviset hører derimot heller hjemme i kalkulus.

Teorem 13.16 (Eksistens og entydighet)**.** *Et initialverdiproblem*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

har en entydig/unik løsning.

Initialverdiene bor i $\mathbb{R}^n$, og løsningene bestemmes entydig av disse. Derfor kan vi slå fast at dimensjonen på løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er lik n: Løsningskurvene er definert for alle valg av t, så det holder for eksempel å se på $t_0 = 0$. Dette betyr bare at en løsningskurve er entydig bestemt av hvilket punkt den går gjennom når, for eksempel, $t_0 = 0$. Vi skriver ned denne observasjonen som et teorem.

Teorem 13.17. *Løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er n–dimensjonalt.*

Merk. Lineær algebra forteller oss at det holder å finne n lineært uavhengige løsninger av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, alle andre løsninger vil være en lineærkombinasjon av disse. Stikkordet her er basis: n lineært uavhengige vektorer i et n–dimensjonalt vektorrom er automatisk en basis.

Eksempel 13.18. Vi så at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$ er løsninger av

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

Er de lineært uavhengige? Det vil si, har

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kun triviell løsning? Vi regner litt for å svare på spørsmålet. Første komponent i denne vektorligningen gir

$$c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} = 0.$$

Flytte-bytte gir

$$c_1 e^{3t} = -c_2 e^{-t}.$$

Multipliser med e^t for å få

$$c_1 e^{4t} = -c_2.$$

Men $c_1 e^{4t}$ er slettes ikke en konstant funksjon hvis $c_1 \neq 0$, så c_1 må være null. Altså må c_2 også være null. Svaret er *ja*, vektorfunksjonene er lineært uavhengige. Dermed utgjør de en basis for løsningsrommet (Teorem 13.17). Siden de er en basis, så vil alle løsninger være på formen

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

△

Merk. En vilkårlig lineærkombinasjon av basisvektorer kalles ofte en *generell løsning*, fordi alle løsninger er på denne formen.

Todimensjonale system

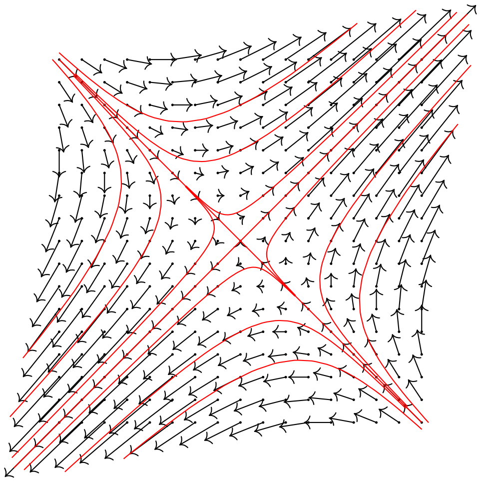
Vi begrenser oss til todimensjonale system i denne seksjonen. Det betyr at A er en 2×2–matrise.

Et *fasediagram* til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er en skisse av alle mulige løsninger, inkludert *orientering* – hvilken retning vi beveger oss langs kurvene. Du kan lage en slik skisse ved å først skissére vektorfeltet fra A, for så å tegne kurver langs pilene. Eventuelt kan du finne en basis – generell løsning – og plotte ulike lineærkombinasjoner av disse. Vi skal se at egenverdiene til A gjør det lettere å lage fasediagrammer.

Eksempel 13.19. Vi fortsetter med favoritteksemplet vårt;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tegn noen kurver som tangerer pilene i vektorfeltet til A for å få et fasediagram (rødt):



Legg igjen merke til hvordan løsningene beveger seg inn mot origo langs egenvektoren som svarer til negativ egenverdi; ut ifra origo langs egenvektoren som svarer til positiv egenverdi. △

Tilfelle 1: diagonaliserbar

Nå er A en reell diagonaliserbar 2×2–matrise, og vi studerer systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Målet er å utlede en basis for løsningsrommet – generell løsning.

Husk: En kvadratisk matrise er diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis av egenvektorer (ikke nødvendigvis ortogonal).

I det aller første eksemplet – Eksempel 13.9 – klarte vi å løse systemet fordi det egentlig bare var snakk om to differensialligninger á la matematikk 1. Det samme skjer hvis A er en diagonalmatrise. Av pedagogiske grunner som vil bli klart etterhvert skriver vi

$$A = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

I dette spesialtilfellet kan vi skrive ut $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$ som

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 \\ y_2' &= \lambda_2 y_2. \end{aligned}$$

Disse er enkle å løse hvis du husker litt matematikk 1. Funksjonene

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

er løsninger. Dermed løser

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

systemet for alle valg av c_1 og c_2. To lineært uavhengige løsninger er nok (Teorem 13.17). Vi leser av en basis direkte:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Dette er første del av utledningen. Oppsummert:

> *Vi klarer å løse systemer med diagonalmatriser.*

Idéen bak siste del av utledningen er ikke komplisert, men matematikken blir litt grisete. Hvis vi endrer til koordinater gitt av en egenvektorbasis, så er A en diagonalmatrise i de nye koordinatene – dette er nøyaktig hva ligningen $A = PDP^{-1}$ betyr, hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Nå er et bra tidspunkt for å ta en liten titt i kapittelet om diagonalisering, hvis du trenger en oppfriskning. La oss argumentere for hva løsningene må være fra et intuitivt ståsted. I egenvektor–koordianatene er basisen for løsningsrommet gitt av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

hvor λ_1 og λ_2 er egenverdier tilhørende to lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Men i disse koordinatene svarer jo bare $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ til egenvektorene i den opprinnelige basisen. Oversettelsen i de opprinnelige koordinatene burde altså være

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \text{ og } \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Vi formulerer forslaget vårt som et teorem. Den interesserte studenten kan lese beviset hvor alle teknikaliteter er fylt inn.

Teorem 13.20. *La A være en diagonaliserbar matrise. Hvis $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er to lineært uavhengige egenvektorer, så er*

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \text{ og } \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

hvor λ_1 og λ_2 er tilhørende egenverdier, en basis for løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Med andre ord er

$$c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

en generell løsning av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Bevis. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to lineært uavhengige egenvektorer til A, med tilhørende egenverdier λ_1 og λ_2. Vi ønsker å løse $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Diagonalisering gir $A = PDP^{-1}$, hvor $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ og

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Systemet kan skrives om til $\mathbf{y}' = PDP^{-1}\mathbf{y}$. Nå bytter vi formelt koordinater ved å multiplisere med P^{-1}:

$$P^{-1}\mathbf{y}' = DP^{-1}\mathbf{y}.$$

Vektorfunksjonen $\mathbf{x}(t) = P^{-1}\mathbf{y}(t)$ er $\mathbf{y}(t)$ i det nye koordinatsystemet, og ligningen er bare

$$\mathbf{x}'(t) = D\mathbf{x}(t).$$

Vi har sett at en basis for løsningsrommet til $\mathbf{x}' = D\mathbf{x}(t)$ er

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

Konverter tilbake til de gamle koordinatene ved å multiplisere med P – vi har $\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{y}$, slik at $\mathbf{y} = P\mathbf{x}$ – for å se at

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \text{ og } P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

er en basis for løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Siden $P = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}$ regner vi ut at

$$P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^{\lambda_1 t} = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1},$$

og

$$P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{\lambda_2 t} = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2}.$$

□

Eksempel 13.21. Nå vet også du hvordan jeg fant løsningene i Eksempel 13.12. Du kan sjekke at $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ er to lineært uavhengige egenvektorer til

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$$

med tilhørende egenverdier henholdsvis 3 og -1. Teorem 13.20 forteller oss at

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{3t} \text{ og } \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-t}$$

er en basis for løsningsrommet; alle løsninger er på formen

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{3t} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-t}.$$

△

Tilfelle 2: ikke diagonaliserbar
Det er to mulige grunner til at en 2×2–matrise ikke er reell diagonaliserbar. Husk at egenverdiene er røttene til det karakteristiske polynomet $\det(A-\lambda I)$. Fra den kjente og kjære *abc*–formelen har vi tre muligheter:

1. To røtter.
2. Én rot.
3. Ingen (reelle) røtter.

De to siste skaper trøbbel. La oss se på et par eksempler.

Eksempel 13.22. Matrisen

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

har ingen (reelle) egenverdier; det finnes ingen (reelle) egenvektorer. △

Eksempel 13.23. Matrisen

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

har en dobbel egenverdi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Egenrommet til 0 er endimensjonalt. Dermed er det umulig å finne to lineært uavhengige egenvektorer til A; umulig å finne en egenvektorbasis. △

Merk. Vi skal kun se på tilfellet *ingen reelle røtter.* Du kan lære om hva som skjer hvis egenvektorene spenner ut et endimensjonalt underrom i faget TMA4145 Lineære metoder.

Ingen reelle røtter
I dette tilfellet betrakter vi A som en kompleks matrise med reelle elementer.

Merk. Det er forvirrende å bytte mellom reelle- og komplekse tall. Vi må være spesielt observante på om vi mener reell eller kompleks fra nå av.

Matrisen er kompleks diagonaliserbar siden røttene til det karakteristiske polynomet kommer i konjugatpar; vi har to ulike komplekse egenverdier. Hvis du ikke henger med: Skriv ned *abc*–formelen og funder litt over når den gir komplekse røtter. Nå er idéen – forvirrende nok – å jobbe med komplekse vektorrom for å finne reelle løsninger. En mer eller mindre lik prosedyre som i det reelle tilfellet lar oss løse $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ som et *komplekst system* – du trenger *ikke* å bekymre deg for hva dette betyr. Herfra finner vi relle løsninger ved å ta real- og imaginærdelen til komplekse løsninger. Grunnen til at sinus og cosinus dukker opp er at de komplekse løsningene er på formen

$$\mathbf{v}e^{(\alpha+i\beta)t} = \mathbf{v}e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t),$$

akkurat som i det reelle tilfellet ($\beta = 0$). Her er resultatet man kommer frem til, uten bevis:

Teorem 13.24. *Anta at $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, er en kompleks egenverdi til A. Hvis $\mathbf{v}$ er en tilhørende kompleks egenvektor, så er*

$$e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\mathbf{v})\cos(\beta t) - \mathrm{Im}(\mathbf{v})\sin(\beta t))$$

og

$$e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\mathbf{v})\sin(\beta t) + \mathrm{Im}(\mathbf{v})\cos(\beta t))$$

en basis for det reelle løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$

Eksempel 13.25. Vi finner løsningene til systemet med

$$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

Egenverdiene er $\pm i$. Du kan sjekke at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi i. Regn ut

$$\mathrm{Re}\,\mathbf{v} = \mathrm{Re}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}\, i\\\mathrm{Re}\, 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

og

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{v} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{Im}\, i\\\mathrm{Im}\, 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

Teorem 13.24 gir basisvektorer

$$\begin{aligned}&e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\mathbf{v})\cos(\beta t) - \mathrm{Im}(\mathbf{v})\sin(\beta t))\\ =&e^{0\cdot t}(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cos(1\cdot t) - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\sin(1\cdot t))\\ =&\begin{bmatrix}-\sin t\\\cos t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

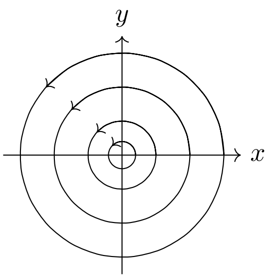
og

$$\begin{aligned}&e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\mathbf{v})\sin(\beta t) + \mathrm{Im}(\mathbf{v})\cos(\beta t))\\ =&e^{0\cdot t}(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\sin(1\cdot t) + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cos(1\cdot t))\\ =&\begin{bmatrix}\cos t\\\sin t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Generell løsning:

$$c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Vi gjenkjenner matrisen som rotasjon t radianer mot klokken. For en litt mer komplisert matrise kan du finne orienteringen ved å plotte vektorefeltet til A for et par punkter i planet for å se om pilene peker med eller mot klokken. Fasediagrammet består av sirkler sentrert i origo orientert mot klokken.



△

Merk. Eksemplet illustrerer hvordan faktorene som inneholder cosinus og sinus bidrar til sirkulær bevegelse.

Mer fasediagram

Vi fortsetter å studere reelle todimensjonale system $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ i denne seksjonen. Målet er å klassifisere alle mulige fasediagrammer basert på egenverdier og egenvektorer. Husk – fra forrige seksjon – at vi kun ser på reelle systemer der A enten er reell- eller kompleks diagonaliserbar.

Reell diagonaliserbar

I dette tilfellet trenger vi ikke å tenke på komplekse tall i det hele tatt. Teorem 13.20 sier at basiselementene alltid er på formen $\mathbf{v}e^{\lambda t}$, hvor $\mathbf{v}$ er en egenvektor med tilhørende egenverdi λ. Faktoren $e^{\lambda t}$ forteller oss hvordan løsningene beveger seg langs spennet til $\mathbf{v}$ når t endres. Kunnskapene våre fra matematikk 1 gjør oss i stand til å fylle ut:

λ	$e^{\lambda t}$	$\mathbf{v}e^{\lambda t}$
> 0	øker	bort fra origo
$= 0$	konstant	står i ro
< 0	minker	mot origo

Hva skjer når t øker?

Vær obs på at $\lambda < 0$ dominerer når $t < 0$; $\lambda > 0$ dominerer når $t > 0$. For et gitt system har vi to slike basiselementer. Her er en fremgangsmåte for å skissére fasediagrammet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ når A er reelt diagonaliserbar.

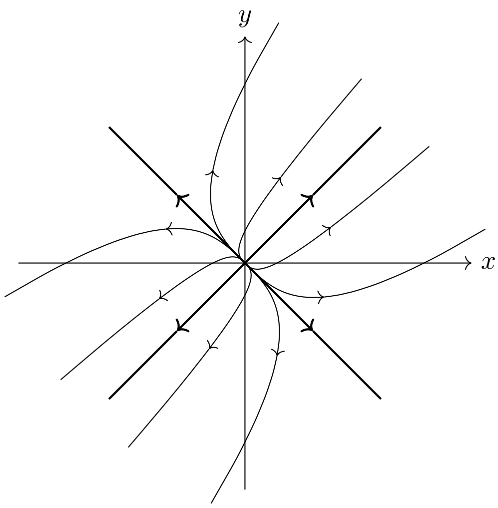
1. Tegn to lineært uavhengige egenvektorer i et koordinatsystem.
2. Avgjør bevegelsen til løsningene langs utspennet til hver egenvektor.
3. Tegn kurver som beveger seg i henhold til dette.

Eksempel 13.26. I Eksempel 13.19 kommer løsningene inn mot origo langs $\mathrm{Sp}(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix})$, og beveger seg deretter bort fra origo langs $\mathrm{Sp}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$. Grunnen til dette er at leddet $c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$ dominerer for negative t (negativ egenverdi), mens $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ dominerer for positive t (positiv egenverdi). △

Eksempel 13.27. Systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

har to lineært uavhengige egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ med egenverdier henholdsvis 3 og 1. Fra diskusjonen ovenfor vet vi at løsningene beveger seg bort fra origo langs begge egenvektorene. Legg merke til at basiselementet $e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dominerer for store t – løsninger mellom egenvektor–aksene vil derfor helle mot $\pm \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ når t blir stor. Fasediagram:



△

Kompleks diagonaliserbar

Teorem 13.24 sier at basisvektorene er på formen

$$e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\mathbf{v})\cos(\beta t) - \mathrm{Im}(\mathbf{v})\sin(\beta t))$$

og

$$e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\mathbf{v})\sin(\beta t) + \mathrm{Im}(\mathbf{v})\cos(\beta t)),$$

hvor $\mathbf{v}$ er en kompleks egenvektor med egenverdi $\lambda = \alpha + i\beta$. Faktorene med cosinus og sinus bidrar til en sirkulær bevegelse – som illustrert i Eksempel 13.25. Hvis også $\alpha \neq 0$ får vi i tillegg en innad- eller utadgående bevegelse avhengig av fortegnet til α – akkurat som i det reelle tilfellet. Kombinasjonen av disse bevegelsene er spiraler som enten beveger seg inn mot- eller bort fra origo.

Eksempel 13.28. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

α	bevegelse
> 0	utadgående spiraler
$= 0$	sirkulær
> 0	innadgående spiraler

Hva skjer når t øker?

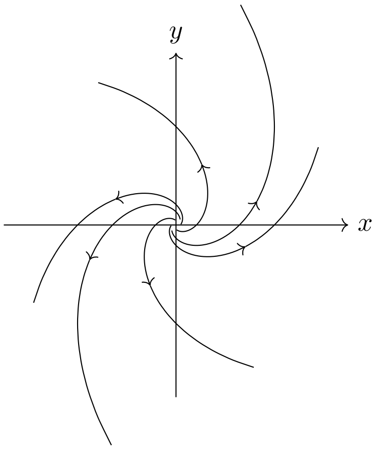
De komplekse egenverdiene er $1 \pm i$. Du kan sjekke at $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor. Teorem 13.24 gir basisvektorer

$$e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad e^t \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Den eneste forskjellen fra eksempel 13.25 er at vi har en faktor e^t. Den generelle løsningen er

$$e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Faktoren e^t bidrar til en utadgående bevegelse, mens matrisen bidrar til en sirkulær bevegelse mot klokken. Derfor består fasediagrammet av utadgående spiraler orientert mot klokken.



Vi fant ut av at bevegelsen skjer mot klokken fordi vi kjente igjen rotasjonsmatrisen. En mer metodisk fremgangsmåte hadde vært å plotte vektorfeltet fra A i et punkt, eller to. Det er ofte lurt å velge $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ siden disse er enkle å plotte. Eksempåelvis har vi

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så vektorfeltet peker skrått opp i første kvadrant fra punktet $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dermed må spiralene – som tangerer pilene fra vektorfeltet – gå mot klokken. △

Reelle diagonaliserbare systemer

Fra nå av trenger du ikke å tenke på komplekse tall, alt er reelt i resten av kapittelet. Målet er å innse at vi allerede har løst generelle n–dimensjonale system $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ under antagelsen om at A er (reell) diagonaliserbar. Dette er også et prakteksemplar på den generelle filosofien om at det holder å se for seg $\mathbb{R}^2$ for så å abstrahere til høyere dimensjoner.

Den generelle utledningen for diagonaliserbare 2×2–matriser besto hovedsaklig av to steg:

1. Det er enkelt å løse problemet for diagonale matriser.
2. Reduser problemet til 1. ved å bytte til egenvektor-koordinater.

Det første punktet er forsatt sant. Nå har vi n differensialligninger á la matematikk 1, i stedet for to. Hvis vi klarer å løse to, klarer vi vel også å løse n. Steg to handler bare om å bytte ut $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ med $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$;

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ med } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \text{ med } P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Prøv å gå gjennom beviset for Teorem 13.20 med disse erstatningene hvis du ikke kjøper forklaringen.

Teorem 13.29. *La A være en diagonaliserbar $n \times n$–matrise. Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er n lineært uavhengige egenvektorer, så er*

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \ \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t},$$

hvor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er tilhørende egenverdier, en basis for løsningsrommet til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Med andre ord er

$$c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en generell løsning av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Eksempel 13.30. Se på systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ med

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Siden matrisen er på trappeform ser vi at egenverdiene er 1, 2 og 4. Du kan sjekke at

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige egenvektorer med egenverdier henholdsvis 1, 2, 2 og 4. Teorem 13.29 gir oss den generelle løsningen

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

△

Inhomogene system

Før vi starter med såkalte inhomogene system skal vi se på hva *homogen* og *inhomogen* betyr for lineære ligninger i $\mathbb{R}^n$. En matriseligning

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

kalles gjerne for en *homogen* ligning. Løsningene til ligningen er et vektorrom, nemlig nullrommet til A, eller *kjernen til lineærtransformasjonen* $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Eksempelvis er nullrommet til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

det lineære spennet til $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Hvis vi legger til en ikke-null vektor $\mathbf{b}$ på høyre side,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kalles heller ligningen inhomogen. Løsningene utgjør ikke et vektorrom. Eksempelvis løser $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Men summen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

løser ikke ikke ligningen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Differansen

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

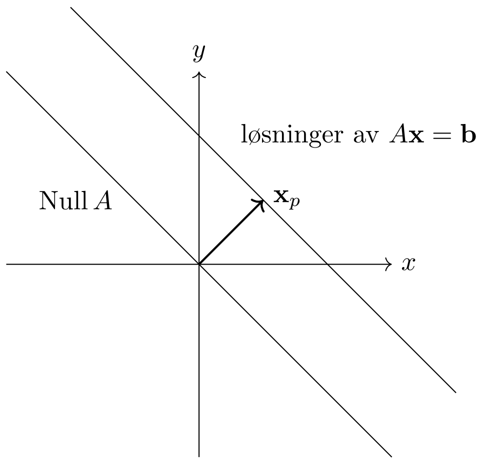
derimot løser den homogene ligningen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette holder generelt. Observasjonen er at alle løsninger på $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er på formen

$$\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$$

hvor $\mathbf{x}_h$ er en vilkårlig vektor i nullrommet til A og $\mathbf{x}_p$ er en spesifikk løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Geometrien er illustrert som følger.



Vektorrom ser kanskje ulike ut, men de oppfører seg relativt likt. Merk at

$$T(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}'(t) - A\mathbf{y}(t)$$

er en lineærtransformasjon ettersom derivasjon og matrisemultiplikasjon er lineære operasjoner. *Kjernen til denne lineærtransformasjonen* er nøyaktig løsningene av systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Derfor blir det korrekt å kalle denne ligningen *homogen*. Den *inhomogene* ligningen svarer til å legge til en vektor $\mathbf{b} = \mathbf{f}(t)$ på høyre side:

$$T(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{f}(t)$$

Eller ekvivalent:

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$$

En spesifikk løsning av $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$ kalles en *partikulær løsning*. En beskrivelse av alle løsninger kalles fortsatt en *generell løsning*. Analogien til $\mathbb{R}^n$ lar oss formulere et teorem.

	$\mathbb{R}^n$	vektorfunksjoner
homogen	$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$	$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$
inhomogen	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$

Ligninger som oppfører seg likt

Teorem 13.31. *Hvis $\mathbf{y}_p(t)$ er en partikulær løsning av*

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t),$$

så er en generell løsning gitt av

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_h(t) + \mathbf{y}_p(t),$$

hvor $\mathbf{y}_h(t)$ er en vilkårlig løsning av den tilhørende homogene ligningen.

Merk. Det forventes ikke at du kan finne partikulære løsninger av generelle system. Du vil alltid få dem servert.

Eksempel 13.32. La oss se på det inhomogene systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 4te^t \end{bmatrix}.$$

En differensialligningsekspert har gitt oss

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2te^t \\ -2e^t \end{bmatrix},$$

men vi sjekker at det er en løsning for sikkerhets skyld:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_p' &= \begin{bmatrix} -2te^t \\ -2e^t \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} -2e^t - 2te^t \\ -2e^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2e^t - 2te^t + (2e^t - 2e^t) \\ -2e^t + (4te^t - 4te^t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_p(t) + 2y_p(t) + 2e^t \\ 2x_p(t) + y_p(t) + 4te^t \end{bmatrix} \\ &= A\mathbf{y}_p + \mathbf{f}(t) \end{aligned}$$

Vi har allerede funnet den generelle homogene løsningen. Teorem 13.31 sier at en generell løsning er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -2te^t \\ -2e^t \end{bmatrix}.$$

△

Andre ordens lineære differensialligninger

I matte 1 har du løst to typer differensialligninger. Den ene er den første ordens lineære ligningen

$$y' + f(t)y = g(t)$$

og den andre er den separable ligningen

$$y' = f(y)g(t).$$

Som et spesialtilfelle av systemer skal vi behandle lineære andreordens differensialligninger med konstante koeffisienter:

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

Det er vanlig å kreve at $y \in \mathcal{C}^2$, altså at y har to kontinuerlige deriverte. På denne måten kan man sikre at ligningen faktisk gir mening. Det finnes mange situasjoner der dette kravet kan slakkes noe, men det er pensum i matte 4. Der du skal lære å løse ligninger av typen

$$y'' + a_1y' + a_0y = f(t)$$

der f ikke en gang er en kontinuerlig funksjon. Løsningsteknikken kalles laplacetransform, og er mer avansert enn den vi tar for oss her.

Hvor kommer andre ordens differensialligninger fra?

En kloss sklir friksjonsfritt på underlaget, og er festet til veggen med en fjær. Hookes fjærlov sier at

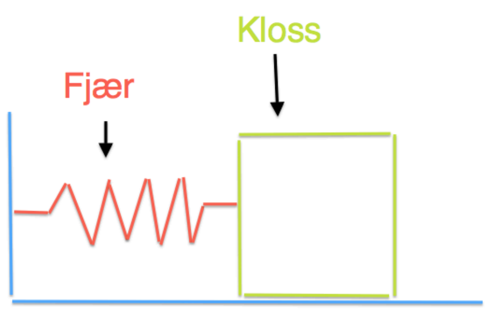
$$F(y) = -ky,$$

der y er hvor langt fjæren er strukket eller komprimert, k er en konstant som avhenger av fjærens stivhet, og $F(y)$ er kraften fra fjæren på klossen. Dersom $y(t)$ er klossens posisjon, er klossens akselerasjon gitt ved $y''(t)$, og Newtons andre lov blir

$$-ky = my'',$$

der m er klossens masse. Dette er en differensialligning. Vi skriver vanligvis

$$my'' + ky = 0.$$



Vi kan komplisere det litt til. La oss innføre luftmotstand. Luftmotstand avhenger kvadratisk av farten:

$$F(y') = b(y')^2;$$

der b er en proporsjonalitetskonstant som sier noe om luftmotstanden. Den totale kraften blir

$$F(y, y') = -ky + b(y')^2,$$

slik at Newtons andre lov gir

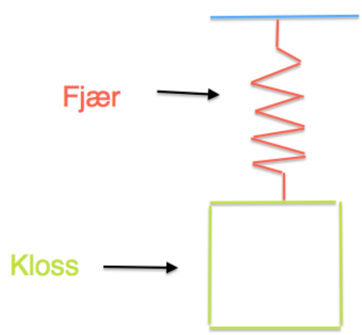
$$my'' - b(y')^2 + ky = 0.$$

Denne ligningen har et problematisk ledd, $b(y')^2$. Men vi kan gjøre en forenkling. Dersom klossen ligger i en tyktflytende væske, blir motstanden proporsjonal med farten istedet for kvadratet av farten, og vi får ligningen

$$my'' - cy' + ky = 0,$$

som er mye enklere å løse.

Vi kompliserer det enda mer. La klossen henge fra taket. I tillegg til fjærkraften og luftmotstanden, vil



nå også gravitasjonen påvirke bevegelsen. Gravitasjonskraften er en konstant kraft mg nedover. Den totale kraften er

$$F(y, y') = -ky + by' - mg,$$

og Newtons andre lov gir differensialligningen

$$my'' - by' + ky = mg.$$

Løsningsteknikk

Vi skal behandle *andre ordens differensialligninger med konstante koeffisienter*:

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

Det er vanlig å sette $a_2 = 1$, for å forenkle analysen. Vi slipper å ha med a_2 i alle formler og utledninger, og vi slipper å luke ut $a_2 = 0$ hver gang vi skal sette opp et teorem. Dersom a_2 skulle slumpe til å være noe annet enn 1, kan du dele den ut av ligningen før du setter igang.

Denne ligningen lar seg lett skrive om til et førsteordens system. Dersom vi innfører de nye variablene $v_1 = y$ og $v_2 = y'$, kan vi skrive

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

og vi vet at vi kan forvente to lineært uavhengige løsninger. Det karakteristiske polynomet til matrisen er

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

med egenvektorer

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske ligningen kjenner du forhåpentligvis igjen fra gymnaset, der du lærte å løse disse ligningene. Den gang sa de noe sånt som at alle løsninger var på formen $Ae^{\lambda t}$, og så satte de dette uttrykket inn i differensialligningen for å utlede den karakteristiske ligningen.

Vi kan bruke analysen fra systemer til å liste opp løsningen til den homogene ligningen for forskjellige typer egenverdier. Merk at vi er i utgangspunktet kun interessert i v_1, og derfor ikke har bruk for egenvektorene når vi skal skrive opp løsninger.

Dersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er reelle, kan vi plukke ut førstekomponenten av den generelle løsningen, og få

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

der koeffisientene har absorbert første komponent til egenvektorene. Dersom $\lambda = \alpha \pm \beta i$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ får vi

$$\begin{aligned} y_h(t) &= c_1 e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(z_1)\cos\beta t - \mathrm{Re}(z_1)\sin\beta t) \\ &\quad + c_2 e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(z_1)\sin\beta t + \mathrm{Re}(z_2)\cos\beta t). \end{aligned}$$

Disse ligger i det lineære utspennet til $e^{\alpha t}\cos\beta t$ og $e^{\alpha t}\sin\beta t$ som også spenner ut et todimensjonalt rom. Derfor kan vi bytte basis og heller skrive den generelle løsningen som

$$y_h(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Dersom $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, vil vi være tilfellet som ikke er pensum i matematikk 3 for generelle todimensjonale system – egenvektorene spenner kun ut et endimensjonalt underrom. Men vi gir deg alle løsningene i dette spesialtilfellet:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

Den interesserte studenten kan lese detaljene i neste seksjon.

Eksempel 13.33. Løsningen til

$$y'' - y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \qquad \triangle$$

Eksempel 13.34. Løsningen til

$$y'' + y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t. \qquad \triangle$$

Eksempel 13.35. Løsningen til

$$y'' - 2y' + y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t. \qquad \triangle$$

Kun en rot, detaljer (frivillig)

Vi ser på detaljene når

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

sitt karakteristiske polynom $\lambda + a_1\lambda + a_0$ kun har en reell rot. Fra *abc*–formelen finner vi

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

Én rot skjer nøyaktig hvis

$$a_1^2 = 4a_0.$$

Nå er ligningen

$$y'' + a_1 y' + \frac{a_1^2}{4} y = 0$$

og egenverdien er

$$\lambda = -\frac{a_1}{2}.$$

Først av alt, egenrommet er endimensjonalt – matrisen er ikke diagonaliserbar:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} - \lambda I &\sim \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} & 1 \\ -a_0 & -a_1 + \frac{a_1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} & 1 \\ -\frac{a_1^2}{4} & -a_1 + \frac{a_1}{2} \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} & 1 \\ -\frac{a_1}{2} & -1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det er en fri variabel, altså er dimensjonen til egenrommet lik en. Dermed er ikke matrisen diagonaliserbar. Følgende *triks* lar oss finne alle løsningene:

$$\begin{aligned} (e^{\frac{a_1}{2}t})'' &= ((y' + \frac{a_1}{2}y)e^{\frac{a_1}{2}t})' \\ &= (y'' + a_1 y' + \frac{a_1^2}{4})e^{\frac{a_1}{2}t} \end{aligned}$$

Så hvis y løser $y'' + a_1 y' + \frac{a_1^2}{4}y = 0$, må

$$(e^{\frac{a_1}{2}t})'' = 0.$$

Integrer opp to ganger:

$$e^{\frac{a_1}{2}t} y = c_1 + c_2 t$$

Multipliser med $e^{-\frac{a_1}{2}t}$:

$$y = c_1 e^{-\frac{a_1}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{a_1}{2}t}$$

Dette betyr at løsningene er på formen oppgitt i forrige seksjon.