Lineære ligningssystem

Vi har et ligningssystem av m ligninger med n ukjente $x_1, ..., x_n$ som kan skrives:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ .... & & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Vi vil finne alle løsninger $(x_1, ..., x_n)$.
Ligningssystemet sies å være konsistent hvis det har minst én løsning og inkonsistent hvis det ikke har noen løsninger.

Eksempler

Eksempel 1. Vi vil løse systemet:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 5 \qquad \times 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \qquad + \end{aligned}$$

Det er ekvivalent med systemet

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 7x_2 &= 14 \end{aligned}$$

Fra den nederste ligningen har vi $x_2 = 2$.
Så gir den første ligningen $x_1 = 2x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$.

Svar: $x_1 = 2,\ x_2 = -1$.

Eksempler

Eksempel 2.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Uendelig mange løsninger:
$x_3 = s$ (et vilkårlig tall), $x_1 = 2 + s/7$, $x_2 = -1 + 9s/7$.

Eksempel 3.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ -4x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Ingen løsning

Matriser

Koeffisientmatrisen til ligningssystemet og høyresidevektoren er

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Totalmatrisen til ligningssystemet er

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Gausseliminasjon

Vi løser ligningssystemet ved å omforme totalmatrisen til en "enkel" matrise ved hjelp av radoperasjoner.

Løsninger til ligningssystemet blir ikke forandret ved radoperasjoner!

- Hva er radoperasjoner?
- Hva mener vi med en "enkel" matrise?

Elementære radoperasjoner i en matrise

1. Addere et multiplum av en rad til en annen rad ($R_j + cR_k$)
2. Bytte om to rader (SWAP(R_j, R_k) / $R_j \leftrightarrow R_k$)
3. Multiplisere en rad med konstant $c \neq 0$ (cR_j)

Radekvivalente matriser
To matriser kalles radekvivalente hvis en kan omformes til andre ved hjelp av elementære radoperasjoner.

Teorem Dersom to ligningssystem har radekvivalente totalmatriser, så har ligningssystemene samme løsninger.

Echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles ledereelementet.

En matrise kalles echelonmatrise hvis

1. Eventuelle nullrader står nederst.
2. Lederelementet i hver ikkenullrad står til høyre for lederelementer i raden over.
3. Alle elementer i en kolonne under et lederelement er lik null.

Anta at totalmtrisen til et ligningssystem er en echelonmatrise. Hver kolonne untatt den siste tilsvarer til en ukjent. En ukjent som tilsvarer til en kolonne med et lederelement kalles en ledende variabel. Andre ukjente kalles frie variabler.

Gausseliminasjon for ligningssystem

Gausseliminasjon:

1. Omforme totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

   til en echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner.

2. Hvis echelonmatrisen inneholder en rad

$$0 \; 0 \; \dots \; 0 \; | b$$

   med $b \neq 0$ så har systemet ingen løsning.

3. Ellers kan vi løse systemet med tilbakesubstitusjon.

Redusert echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles lederelementet.

En matrise kalles redusert echelonmatrise hvis

1. Eventuelle nullrader står nederst.
2. Lederelementet i hver ikkenullrad står til høyre for lederelementer i raden over.
3. Alle elementer i en kolonne under et lederelement er lik null.
4. Lederelementet i hver ikkenullrad er 1.
5. Hver lederelement er eneste element som ikke er lik 0 i sin kolonne.

1-3: Echelonmatrise
1-5: Redusert echelon matrise

Gauss-Jordaneliminasjon for ligningssystem

Gausse-Jordaneliminasjon:

1. Omforme totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

   til en redusert echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner.

2. Hvis redusert echelonmatrisen inneholder en rad

$$0 \; 0 \; \dots \; 0 \; | 1$$

   så har systemet ingen løsning.

3. Ellers kan vi løse systemet med tilbakesubstitusjon.

Semesterprøve oppgaver, 2007

Oppgave Bestem redusert echelonform for matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Semesterprøve oppgaver, 2007

Oppgave Hvilken av matrisene er på redusert echelon form?

$$A : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Semesterprøve oppgaver, 2007

Oppgave Hvilken av matrisene er på redusert echelon form?

$$A: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppsummering

Vi har lært:
variasjon av parametre, lineære systemer

Lærebok: 4.6, 1.1

Nest gang
Gausseliminasjon, Vektorer i R^n, matrise

Lærebok: 1.2, 1.3, 1.4