Tvungne svingninger

Vi ser på et masse-fjær system påvirket av en ytre kraft $F_{ex}(t) = F_0 \cos \omega t$ og får ligningen

$$my'' + \mu y' + ky = F_0 \cos \omega t.$$

En ligninde differensialligning beskriver en elektronisk krets med motstand (resistor), kondensator, spole (induktans) og spenningskilde

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t),$$

hvor $E(t)$ er elektromotorisk spenning av kilden.

Udempet system

La først $\mu = 0$.

$$my'' + ky = F_0 \cos \omega t.$$

Vi finner en partikulær løsning

$$y_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m},$$

ω_0 er den naturlige frekvensen til systemet, den er uavhengig av den ytre kraften. Amplituden til y_p blir

$$A_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{F_0}{k(1 - (\omega/\omega_0)^2)}$$

og når $\omega \to \omega_0$ (frekvensen til den påtrykte kraften nærmer seg systemets naturlige frekvens), går A_p til uendelig. Dette fenomenet kalles resonans.

Resonans

Hva skjer når $\omega = \omega_0$? Vi får likningen

$$my'' + ky = F_0 \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Fra ubestemte koeffisienters metoden (modifikasjonsregelen) vet vi at løsningen er på formen

$$y_p = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$$

Vi finner

$$y_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

Amplituden går til uendelig når $t \to \infty$.

Dempede tvungne svingninger

Vi antar at $\mu > 0$, og ser på dempede svingenger med en ytre kraft,

$$my'' + \mu y' + ky = F_0 \cos \omega t, \quad \mu > 0$$

Generell løsning blir $y = y_p + y_h$, hvor y_p er en partikulær løsning og y_h er generell løsning til den tilhørendehomogene likningen. Vi finner y_p på formen

$$y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

$y_h(t)$ går mot 0 når $t \to \infty$.

Stasjonære løsningen

Løsningen $y = y_p + y_h$ til

$$my'' + \mu y' + ky = F_0 \cos \omega t$$

går mot den stasjonære løsningen

$$y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

som er en periodisk funksjon med

$$A = \frac{F_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \quad B = \frac{F_0 \omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

Eksamensoppgave

Oppgave

Finn funksjonen $y(t)$ *som tilfredstiller bevegelsesligningen gitt av et mass-fjær system med ytre kraft, med masse* $m = 1$ *kg, dempningskonstant* $\mu = 4$ *kg/s, fjær konstant* $k = 4 kg/s^2$*, ytre kraft* $r(t) = 2\cos 2t$ *N og* $y(0) = y'(0) = 0$.

Variasjon av parametre

En generell metode for å finne en partikulær løsning til

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

La y_1 og y_2 være to lineært uavhengige løsninger av den tilhørende homogene likningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Vi finner y_p på formen $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$. Et system av ligningener for v_1 og v_2 blir

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = r(x)$$

Husk å skrive ligningen på standardform for å få riktig $r(x)$!

Variasjon av parametre og Wronskideterminanten

Vi løser systemet, finner v_1', v_2', integrerer og får:

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx,$$

der $W = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ er Wronskideterminanten til y_1 og y_2.

Eksamensoppgave

Oppgave

Finn to lineært uavhengige løsninger $y(x)$, på formen $y(x) = x^m$, til den homogene ligningen

$$x^2 y'' + xy' - y = 0, \; x > 0.$$

Finn en partikulær løsning til ligningen

$$x^2 y'' + xy' - y = 4x, \; x > 0.$$