Eksistens og entydighet av løsninger

Vi ser på en lineær homogen diffirensialligning av orden 2,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (*)$$

der $p(x)$ og $q(x)$ er kontinuelige på et intervall I.

Setning (Initialverdi-problemet, IVP)

Det finnes en entydig (nøyaktig én) løsning til $(*)$ som tilfredsstiller initialbetingelser

$$y(x_0) = K_0 \quad y'(x_o) = K_1$$

der x_0 er et punkt i I.

Fundamentalteoremet for homogene ligninger

Superposisjonsprinsippet

Hvis y_1 og y_2 er løsninger av den homogene ligningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

så er også $c_1 y_1 + c_2 y_2$ en løsning av (1) hvis c_1, c_2 er konstanter.

Basis og generell løsning

To lineært uavhengige løsninger y_1 og y_2 av ligningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

kalles en basis for løsningene av ligningen og

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

kalles en generell løsning.

Initialverdiproblem

Vi vil finne en løsning av ligningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

som oppfyller initialbetingelser

$$y(x_0) = K_0,\ y'(x_0) = K_1.$$

Hvis $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ er en generell løsning av ligningen, løser vi initialverdiproblemet ved å bestemme konstantene c_1 og c_2.
Vi får et system:

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = K_0,$$

$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = K_1.$$

Andreordens lineære homogene ligninger med konstante koeffisienter

Vi vil finne generell løsning av en ligning på formen

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{2}$$

1. Skriv ned den karakteristiske ligningen til (4)

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{3}$$

2. Løs (3):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Tre tilfeller

3. Finn generell løsning av differensialligningen:

I	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ reelle røtter	$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
II	$\lambda_{1,2} = a \pm ib$ komplekse røtter	$y(x) = e^{at}(A \cos bt + B \sin bt)$
III	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reell dobbelrot	$y(x) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda_2 t}$

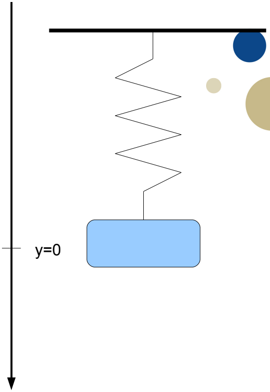
Eksamensoppgave

Example (des 2008)

Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 6y' + 13y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Masse-fjærsystem



$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0, \qquad m, c, k \geq 0$$

m er masse,
c er dempningkonstant,
k er fjærkonstant.

Frie svingninger

Udempet system:

$$my'' + ky = 0, \quad y'' + \omega_0^2 y = 0, \tag{4}$$

hvor $\omega_0^2 = k/m$.
Generell løsning av (1) er

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ C = \sqrt{A^2 + B^2},\ \tan\delta = \frac{B}{A}$$

Harmoniske svingninger med periode $T = 2\pi/\omega_0$, frekvens $\omega_0/2\pi$, amplitude C og fasevinkel δ.

Demping

Dempet system:

$$my'' + \mu y' + ky = 0, \quad y'' + 2cy' + \omega_0^2 y = 0,$$

$\omega - 0^2 = k/m$ and $c = \mu/(2m)$.Karakteristisk ligning har røtter:

$$\lambda_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - \omega_0^2}$$

	Røtter	Betingelse	Demping
I	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ reelle	$c > \omega_0$	overkritisk
II	$\lambda_1 = \lambda_2$ dobbelrot	$c = \omega_0$	kritisk
III	$\lambda_{1,2}$ komplekse	$c < \omega_0$	underkritisk

Oppsummering

Vi har lært:
initialverdiproblem til andreordens lineære ligninger, 2.orden diff.ligninger med konstante koeffisienter, svingninger
Lærebok: 4.3,4.4

Neste gang:
Tvungne svingninger, nonhomogene ligninger, ubestemte koeffisienters metode.
Lærebok: 4.5

Kahoot om kompleksetall!