Symmetriske matriser

En kvadratisk matrise A er symmetrisk hvis $A^T = A$; hvis $A = [a_{ij}]$ så er A symmetrisk når $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i og j.

Teorem Egenvektorer som tilhører distinkte egenverdier for en symmetrisk matrise er ortogonale.

Ortogonal matrise

En kvadratisk matrise P er ortogonal hvis P er inverterbar og $P^T = P^{-1}$; det vil si $P^T P = I$.

Teorem En kvadratisk matrise P er ortogonal hvis og bare hvis kolonnene til P danner en ortonormal system.

Ortogonale 2×2 matriser er på formen

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}$$

Diagonalisering

En kvadratisk matrise A er ortogonalt diagonaliserbar hvis det finnes en ortogonal matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

Teorem En kvadratisk matrise A er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis A er symmetrisk.

Hvis $A = PDP^{-1}$ og P er ortogonal, så må kolonnene til P være innbyrdes ortogonale enhetsvektorer som er egenvektorer til A.

Kvadratiske former

Kvadratisk form i $\mathbf{R}^n$ er en funksjon $Q(x)$ som kan skrives som

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

hvor A er en $n \times n$-matrise. I R^2 har vi
$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ og matrisen er

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Kjeglesnitt og kvadratisk form

La

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$$

være ligningen for et kjeglesnitt K. Da er $ax^2 + 2bxy + cy^2$ den tilhørende kvadratiske formen.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x} = (x, y)^T$ og $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$

Rotasjon av koordinatsystemet

Koordinataksene kan dreies slik at ligningen for K i det nye koordinatsystemet blir

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + f = 0$$

der λ_1 og λ_2 er egenverdiene til A.

Rotasjonen gjøres ved koordinatskiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ der P er en ortogonal matrise som diagonaliserer A og det $P = 1$;

$$P = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Klassifikasjon

Etter rotasjonen av koordinatsystemet får vi en av likningene

$$y^2 = kx, \; x^2 = ky, \quad \text{parabel},$$
$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = \pm 1, \quad \text{hyperbel},$$
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad \text{ellipse}.$$