Diagonalizering

En $n \times n$ matrise A sies å være diagonaliserbar hvis den er similær med en diagonalmatrise D.

$$A = PDP^{-1}$$

Diagonalizering

En $n \times n$ matrise A sies å være diagonaliserbar hvis den er similær med en diagonalmatrise D.

$$A = PDP^{-1}$$

Hvis A er en diagonaliserbar matrise, $A = PDP^{-1}$, så kan vi regne ut potenser av A ved å bruke formelen

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Diagonalisering og egenvektorer

Teorem En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer.

Diagonalisering og egenvektorer

Teorem En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer.

Hvis A er diagonaliserbar og $A = PDP^{-1}$, så er kolonnene til P egenvektorer for A og D er diagonalmatrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen.

Diagonalisering og egenvektorer

Teorem En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer.

Hvis A er diagonaliserbar og $A = PDP^{-1}$, så er kolonnene til P egenvektorer for A og D er diagonalmatrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen.

P kalles egenvektormatrise for A og D kalles egenverdimatrise for A.

Diagonalisering og egenvektorer

Teorem En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer.

Hvis A er diagonaliserbar og $A = PDP^{-1}$, så er kolonnene til P egenvektorer for A og D er diagonalmatrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen.

P kalles egenvektormatrise for A og D kalles egenverdimatrise for A.

Teorem Hvis A har n *distinkte* egenverdier $\lambda_1, ..., \lambda_n$ og $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ er tilhørende egenvektorer for A, så er $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ lineært uavhengige og A er diagonaliserbar.

Komplekse egenverdier

Et kompleks tall λ som oppfyller $det(A - \lambda I) = 0$ kalles en (kompleks) egenverdi til matrise A.

Komplekse egenverdier

Et kompleks tall λ som oppfyller $det(A - \lambda I) = 0$ kalles en (kompleks) egenverdi til matrise A.

Hvis A er en matrise med reelle elementer og λ er en egenverdi så er $\bar{\lambda}$ også en egenverdi.

Komplekse egenverdier

Et kompleks tall λ som oppfyller $det(A - \lambda I) = 0$ kalles en (kompleks) egenverdi til matrise A.

Hvis A er en matrise med reelle elementer og λ er en egenverdi så er $\bar{\lambda}$ også en egenverdi.

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Komplekse vektorer

Vi ser på n-vektorer med komplekse komponenter, $\mathbf{v} = [z_1, ..., z_n]$ hvor $z_j = x_j + iy_j$ er komplekse tall.

Komplekse vektorer

Vi ser på n-vektorer med komplekse komponenter, $\mathbf{v} = [z_1, ..., z_n]$ hvor $z_j = x_j + iy_j$ er komplekse tall.

$$\mathbf{v} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + i\mathrm{Im}(\mathbf{v}),$$

$\mathrm{Re}(\mathbf{v}) = [x_1, ..., x_n]$ og $\mathrm{Im}(\mathbf{v}) = [y_1, ...y_n]$.

Komplekse vektorer

Vi ser på n-vektorer med komplekse komponenter, $\mathbf{v} = [z_1, ..., z_n]$ hvor $z_j = x_j + iy_j$ er komplekse tall.

$$\mathbf{v} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + i\mathrm{Im}(\mathbf{v}),$$

$\mathrm{Re}(\mathbf{v}) = [x_1, ..., x_n]$ og $\mathrm{Im}(\mathbf{v}) = [y_1, ...y_n]$.
Vi definerer kompleks konjugert vektor

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) - i\mathrm{Im}(\mathbf{v})$$

Komplekse egenverdier og egenvektorer

La A være en matrise (med reelle tall) og $\mathbf{v}$ være en kompleks vektor, vi definerer

$$A\mathbf{v} = A\mathrm{Re}\mathbf{v} + iA\mathrm{Im}\mathbf{v}.$$

Komplekse egenverdier og egenvektorer

La A være en matrise (med reelle tall) og $\mathbf{v}$ være en kompleks vektor, vi definerer

$$A\mathbf{v} = A\mathrm{Re}\mathbf{v} + iA\mathrm{Im}\mathbf{v}.$$

En kompleks vektor $\mathbf{v} \neq 0$ kalles en egenvektor til kvadratisk matrisen A hvis $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ hvor λ er et kompleksetall som kalles en egenverdi til A.

Komplekse egenverdier og egenvektorer

La A være en matrise (med reelle tall) og $\mathbf{v}$ være en kompleks vektor, vi definerer

$$A\mathbf{v} = A\mathrm{Re}\mathbf{v} + iA\mathrm{Im}\mathbf{v}.$$

En kompleks vektor $\mathbf{v} \neq 0$ kalles en egenvektor til kvadratisk matrisen A hvis $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ hvor λ er et kompleksetall som kalles en egenverdi til A.
Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor til en reell matrisen A, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, så er $\bar{\mathbf{v}}$ også en egenvektor og $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$.

Komplekse egenverdier og egenvektorer

La A være en matrise (med reelle tall) og $\mathbf{v}$ være en kompleks vektor, vi definerer

$$A\mathbf{v} = A\mathrm{Re}\mathbf{v} + iA\mathrm{Im}\mathbf{v}.$$

En kompleks vektor $\mathbf{v} \neq 0$ kalles en egenvektor til kvadratisk matrisen A hvis $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ hvor λ er et kompleksetall som kalles en egenverdi til A.
Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor til en reell matrisen A, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, så er $\bar{\mathbf{v}}$ også en egenvektor og $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$.
Et kompleksetall λ er en egenverdi hvis og bare hvis $\det(A - \lambda I) = 0$.

Oppsummering

Denne uken:
Egenvektorer og egenverdier, diagonalisering
Lærebok: 5.1, 5.2, 5.3, 5.5

Neste gang
Anvendelser til diffirensialligninger
Lærebok: 5.7

Oppsummering

Denne uken:
Egenvektorer og egenverdier, diagonalisering
Lærebok: 5.1, 5.2, 5.3, 5.5

Neste gang
Anvendelser til diffirensialligninger
Lærebok: 5.7

Påskelesing: 5.6, 5.8, 6.3