Egenverdier og egenvektorer: Definisjon

La A være en kvadratisk matrise.
En vektor $\mathbf{v} \neq 0$ kalles en egenvektor for A hvis $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ hvor λ er et (reelt) tall; λ er kalt en egenverdi for A.

Egenverdier og egenvektorer: Definisjon

La A være en kvadratisk matrise.
En vektor $\mathbf{v} \neq 0$ kalles en egenvektor for A hvis $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ hvor λ er et (reelt) tall; λ er kalt en egenverdi for A.

Vi antar at λ er en egenverdi for A og ser på alle $\mathbf{v}$ slik at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
De danner et vektorrom som kalles egenrom for A tilsvarende egenverdi λ.

Egenverdier og egenvektorer

Teorem En kvadratisk matrise A har 0 som egenverdi hvis og bare hvis den er ikke inverterbar.

Egenverdier og egenvektorer

Teorem En kvadratisk matrise A har 0 som egenverdi hvis og bare hvis den er ikke inverterbar.

Teorem Antar at $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k$ er egenvektorer for A som svarer til forskjellige egenverdier $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Da er $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ lineært uavhengige.

Den karakteristiske ligningen

Teorem Et reelt tall λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Den karakteristiske ligningen

Teorem Et reelt tall λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$ er en polinomligning og kalles den karakteristiske ligningen til A.

Egenverdiene og egenvektorer

1. Finn egenverdiene til A ved å løse den karakteristiske ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. For hver λ finn de tilhørende egenvektorene ved å løse systemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.

Egenvektorer med en gitt egenverdi utgjør sammen med nullvektoren et egenrom, det er løsningsrommet til systemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.

Eksamensoppgave

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Finn alle egenverdiene til A. Finn en basis for hvert egenrom til A.

Similære matriser

To $n \times n$ matriser A og B kalles similære hvis det fins en inverterbar matrise P slik at $B = P^{-1}AP$.

Similære matriser

To $n \times n$ matriser A og B kalles similære hvis det fins en inverterbar matrise P slik at $B = P^{-1}AP$.

Teorem De karakteristiske ligningene til to similære matriser er like. Similære matriser har samme egenverdier.

Oppsummering

Vi har lært:
Egenverdier, egenvektorer, den karakteristiske ligningen
Lærebok: 5.1, 5.2, sider 284-297

Nest gang
Diagonalisering, komplekse egenverdier

Lærebok: 5.3, 5.5, sider 299-304, 313-317.