Radrommet

La A være en $m \times n$ matrise, $A = [a_{ij}]$.

Radrommet til A $\mathrm{Row}(A)$ er underrommet i $\mathbf{R}^n$ utspent av radvektorene til A. Hvis

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1 & = & (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\ \mathbf{r}_2 & = & (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\ ... & ... & ... \\ \mathbf{r}_m & = & (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}) \end{array}$$

så er $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m)$.

Basis for $\mathrm{Row}(A)$

Teorem To radekvivalente matriser har samme radrommet.

Teorem Hvis E er en echelonmatrise, så er ikkenullradene til E en basis for $\mathrm{Row}(E)$.

Ved Gausseliminasjon kan vi omforme A til en echelonmatrise E. Ikkenullradene i E danner en basis for $\mathrm{Row}(A)$. Radrangen til A er lik antallet av lederelementer i E.

$$\dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A) = \mathit{rank}(A).$$

Eksamensoppgave

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for nullrommet Null(A), en basis for radrommet Row(A) og en basis for kolonnerommet (søylerommet) Col(A).

Markov-kjeder: Eksempel

Eksamensoppgave

Eieren av bilutleiefirmaet Lei-et-Vrak observerer at av de bilene som ikke er utleid i starten av en uke, er 30% fortsatt ikke utleid i starten av uka etter. Videre er 60% av bilene som er utleid i starten av en uke fortsatt utleid i starten av uka etter. I det lange løp, hvor stor andel av bilene til Lei-et-Vrak vil være utleid i starten av en uke?

Markov-kjeder: teorien

Markov-kjede er en matematisk model som beskrives ved en følge av vektorer (posisjoner) $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k, ...$ som oppfyler $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$ og P er en kvadratisk matrise. For eksempel migrasjon-model. Matrisen P i modellen har de følgene egenskapene:

- alle elementer til P er større eller lik 0;
- summen av elementer i hver kolonne er lik 1.

En slik matrise kalles stokastisk.

Regulære stokastiske matriser

Hvis P er en stokastisk matrise og $\mathbf{q}$ er en vektor som har ikke negative elementer med summen av elementene lik en (sannsynlighetsvektor) slik at $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$, da kalles $\mathbf{q}$ en stasjonær ("steady-state") vektor til P.

En stokastisk matrise P kalles regulær hvis det finnes m slik at alle elementene til P^m er positive.

Teorem Hvis P er en regulær stokastisk matrise så finnes det eksakt en stasjonær vektor $\mathbf{q}$ til P.

Eksamensoppgave

Den nye studentkaféen ved det Antarktiske Universitet av Tropisk Medisin tilbyr et valg mellom tre muligher: kjøtt, vegetar, og sandwich. Forskning viser at studenter velger maten avhengig kun av det de spiste dagen før.
Det er en sannsynlighet på 0,1 at en student spiser det samme som dagen før. En student som ikke spiste kjøtt dagen før spiser kjøtt med en sannsynlighet på 0,3. En student som spiste kjøtt dagen før velger sandwich med en sannsynlighet på 0,3.

Sett opp den stokastiske matrisen til problemet og bruk den til å finne hvor stor andel av hver mattype som bør kjøpes inn i det lange løp.

Oppsummering

Denne uken:
Lærebok: 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.9 sider 226-254, 271-278

Nest gang:

Lærebok: 5.1, 5.2, sider 283-297.