Dimensjon

Teorem La $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ være en basis for vektorrom V, hvis $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m\}$ er en delmengde av V og $m > n$ så er vektorene i T lineart avhengige.

Teorem To basiser for et vektorrom V har like mange vektorer.

Antallet vektorer i en basis for V kalles dimensjonen til vektorromet V, $\mathrm{dim(V)}$.

Teorem Hvis H er et underrom av V så er $\mathrm{dim(H)} \leq \mathrm{dim(V)}$.

Basis og dimensjon

Teorem La V være et n-dimensjonalt vektorrom.

— Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n lineært uavhengige vektorer i V, så er S en basis for V.

— Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n vektorer som utspenner V, $\mathrm{span(S) = V}$, så er S en basis for V.

— Hvis S er lineært uavhengig, så finnes en basis for V som inneholder S

— Hvis S utspenner V så inneholder S en basis for V.

Dimensjonen til $\mathrm{Null}(A)$ and $\mathrm{Col}(A)$

— Dimensjonen til $\mathrm{Null}(A)$ er lik antall frie variabler;

— Dimensjonen til $\mathrm{Col}(A)$ er lik antall ledende variabler.

$$\dim \mathrm{Null}(A) + \dim \mathrm{Col}(A) = n$$

Dimensjonen til $\mathrm{Col}(A)$ kalles rangen til A.

Basis og koordinater

Basis for vektorrom: En endelig mengde $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ av vektorer i et vektorrom V er en basis til V hvis

— vektorene i B utspenner V, $\mathrm{Span}(B) = V$,og

— vektorene i B er lineært uavhengige.

Da kan enhver vektor $\mathbf{x}$ i V skrives *entydig* på formen

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + ... + c_n\mathbf{b}_n.$$

Koeffisientene $c_1, ..., c_n$ er koordinatene til $\mathbf{x}$ i basisen $B = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$; vi skriver

$$[\mathbf{x}]_B = [c_1 ... c_n]^T$$

$[x]_B$ er en element i R^n

Basisskifte

La $\mathbf{x}$ være en vektor i R^n, $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^T$ er koordinater til $\mathbf{x}$ i den standarte basisen og la $B = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ være en annen basis til R^n, da er

$$\mathbf{x} = P_B[\mathbf{x}]_B,$$

hvor P_B er en matrise med kolonnene $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$,

$$P_B = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n].$$

Oppsummering

Denne gangen:
Lærebok: 4.4, 4.5, sider 234-246

Nest gang
Radrommet og Markov-kjeder
Lærebok: 4.6, 4.9, sider 248-254