Lineært uavhengige vektorer

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengige hvis ligningen $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ bare har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Lineært uavhengige vektorer

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengige hvis ligningen $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ bare har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er lineært avhengige hvis det finnes $c_1, c_2, ...c_n$, ikke alle null, slik at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

Vektorer i $\mathbf{R}^n$

Teorem I $\mathbf{R}^n$ er n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times n$ matrisen A med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$, har determinant ulik null, $\det(A) \neq 0$.

Vektorer i $\mathbf{R}^n$

Teorem I $\mathbf{R}^n$ er n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times n$ matrisen A med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$, har determinant ulik null, $\det(A) \neq 0$.

Teorem I $\mathbf{R}^n$ er k vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$, $k < n$, lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times k$ matrisen A med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$, har pivot-posisjon i hver kolonne.

Basis

Basis for vektorrom: En endelig mengde $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ av vektorer i et vektorrom H er en basis av H hvis

— vektorene i S er lineært uavhengige, og

— vektorene i S utspenner H, $\mathrm{span}(S) = H$.

Basis

Basis for vektorrom: En endelig mengde $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ av vektorer i et vektorrom H er en basis av H hvis

- vektorene i S er lineært uavhengige, og
- vektorene i S utspenner H, $\mathrm{span}(S) = H$.

Da kan enhver vektor i H skrives *entydig* på formen

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n.$$

Basis for $\mathbf{R}^n$

Standardbasis i $\mathbf{R}^n$ er

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0)$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

Det finnes mange forskjellige basiser for $\mathbf{R}^n$.

Nullrommet

$\mathrm{Null}(A)$ er løsningsrommet til det homogene systemet $A\mathbf{x} = 0$ som er ekvivalent med $E\mathbf{x} = 0$.

Hvis systemet har k frie variabler, blir generell løsning på formen

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + ... + t_k\mathbf{v}_k,$$

og da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

Kolonnerommet

Kolonnerommet til A $\mathrm{Col}(A)$ er underrommet i $\mathbf{R}^m$ utspent av kolonnevektorene til A. Hvis

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

så er $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$.

Kolonnerommet

Kolonnerommet til A $\mathrm{Col}(A)$ er underrommet i $\mathbf{R}^m$ utspent av kolonnevektorene til A. Hvis

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

så er $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$.

Inhomogene system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent (har en løsing) hvis og bare hvis høyresidevektoren $\mathbf{b}$ er i kolonnerommet til A.

Kolonnerommet

Kolonnerommet til A $\mathrm{Col}(A)$ er underrommet i $\mathbf{R}^m$ utspent av kolonnevektorene til A. Hvis

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

så er $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$.

Inhomogene system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent (har en løsing) hvis og bare hvis høyresidevektoren $\mathbf{b}$ er i kolonnerommet til A.

Kolonnene i A som svarer til ledende variabler i E er en basis for $\mathrm{Col}(A)$.

Eksamensoppgave

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 6 & -5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for nullrommet Null(A) og en basis for kolonnerommet (søylerommet) Col(A).

Oppsummering

Vi har lært:
Vektorrom, Underrom, Basis
Lærebok: 4.1-4.3

Nest gang
Koordinatsysytemer, dimensjon

Lærebok: 4.4, 4.5