Lineære ligningssystem, repetisjon

Vi har sett følgende metoder for å løse lingningssystem:

I Gauss-eliminasjon:
(I a) transformasjon av totalmitrisen, (I b) tilbakesubstitusjon

II Gauss-Jordan-eliminasjon

III Invers matrise:
(III a) Beregning av A^{-1}, (III b) $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

Algoritmanalyse

I (Gauss) I a krever $2/3n^3$ oparasjoner, I b krever n^2 operasjoner

II (Gauss-Jordan) krever n^3 operasjoner

III (invers) III a krever $2n^3$ operasjoner, III b krever $2n^2$ operasjoner

Gauss-eliminasjon	Invers matrise
+ tar mindre tid	+ III a er uvhengig av **b**
+ kan brukes for	tar mindre tid når mange
alle matriser	system med samme A skalløses

LU-faktorizering

Ideen: gjør Gauss eliminasjon på koeffisientersmatrise og husk hva slags operasjon var brukt.

$$A \to \cdots \to U$$

U er en trappeform matrise, $A = LU$ hvor L er en nedretriangular matrise med 1'er på diagonalen.

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Triangulær matriser

En kvadratisk matrise $A = [a_{ij}]$ kalles øvre/nedretriangulær hvis $a_{ij} = 0$ når $i > j$/$i < j$ (alle elementer over/under hoveddiagonalen lik null).

Eksempler

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

LU-faktorisering og lineære system

For å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vi
- først finner $\mathbf{y}$ slik at $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (dette svarer til transformasjonen av vektor $\mathbf{b}$ i totalmatrisen ved Gauss-eliminasjon),
- og så finner $\mathbf{x}$ ved å løse $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (det er tilbakesubstitusjon i Gauss-eliminasjon).

LU-faktorisering finnes hvis A kan reduseres til trappeform matrise uten å bytte om rader, ellers bruker man PLU-faktorisering som også har en permutasjon P av rader. I praksis er PLU brukt, permutasjon brukes også til å redusere beregningsfeil.

Oppsummering

Vi har lært:
LU-faktoresering

Lærebok: 2.5, sider: 141-147

Nest gang
Kahoot! (kap. 1 og 2), Determinanter

Lærebok: 3.1-3.2, sider: 182-192.