Inverse matriser

Definisjon En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis det finnes en matrise C slik at $AC = CA = I$ der I er identitetsmatrisen.

Hvis A er en inverterbar matrise, så er det nøyaktig én matrise C slik at $AC = CA = I$. Den kalles den inverse til A og betegnes A^{-1}.

Setning

Hvis A er inverterbar, så er A^{-1} inverterbar, og $(A^{-1})^{-1} = A$.
Hvis A og B er inverterbare $n \times n$-matriser, så er AB inverterbar og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Hvis A er inverterbar, så er A^T inverterbar, og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Inverse 2×2 matriser

En 2×2 matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, og da er

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgaver fra tidligere semesterprøver

Oppgave 1 Hva blir $A^{-1} + B^{-1}$ hvis $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$?

Oppgave 2 Gitt tre inverterbare kvadratiske matriser A, B og C som oppfyller $AB = C$. Hva er A^{-1} uttrykt ved B og C.

Inverse matriser og lineære ligningssystem

Hvis A er en kvadratisk matrise og A er inverterbar, så har ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

eksakt en løsning

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Setning

La A være en kvadratisk matrise. Følgende betingelser er ekvivalente:

1. *A er inverterbar,*
2. *A er radekvivalent med identitesmatrisen I,*
3. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare den trivielle løsningen $\mathbf{x} = 0$,*
4. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning for alle $\mathbf{b}$.*

Inverse $n \times n$ matriser

La A være en $n \times n$ matrise. For å finne A^{-1} omformer vi $n \times 2n$ matrisen

$$[A|I]$$

til en redusert echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner. Hvis A er inverterbar, vil den reduserte echelonmatrisen være

$$\left[I|A^{-1}\right].$$

Inverse lineærtransformasjon

En lineærtransformasjon T fra $\mathbf{R}^n$ til $\mathbf{R}^n$ kalles inverterbar hvis det finnes en transformasjon S fra $\mathbf{R}^n$ til $\mathbf{R}^n$ slik at $S \circ T = T \circ S = I$. Da er S også en lineærtransformasjon, S kalles T^{-1}.

T er inverterbar hvis og bare hvis matrisen A til T er inverterbar og matrisen til T^{-1} er A^{-1}.

Eksamensoppgave

Oppgave La $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_3, x_1 + 3x_3, 4x_1 - 3x_2 + 8x_3)$, T er en inverterbar lineærtransformasjon fra $\mathbf{R}^3$ til $\mathbf{R}^3$. Finn en formel for T^{-1}.

Oppsummering

Vi har lært:
Inverse matriser

Lærebok: 2.2, 2.3, sider: 120-132

Nest gang
LU-faktoresering, Determinanter

Lærebok: 2.5(!), 3.1, sider: 141-147, 182-185.