Komposisjon av lineære transformasjoner

La T være en lineær transformasjon fra $\mathbf{R}^p$ til $\mathbf{R}^n$ og S være en lineær transformasjon fra $\mathbf{R}^n$ til $\mathbf{R}^m$, vi definerer $S \circ T$ som en transformasjon fra $\mathbf{R}^p$ til $\mathbf{R}^m$,

$$S \circ T(\mathbf{v}) = S(T(\mathbf{v})).$$

Da er $S \circ T$ en lineær transformasjon. La A være standardmatrisen til S og B være standardmatrisen til T. Vi vil finne standardmatrisen til $S \circ T$. Vi har

$$C(\mathbf{v}) = A(B\mathbf{v}) = A(v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + ... + v_p\mathbf{b}_p),$$

hvor $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_p$ er kolonnene til B,

$$C(\mathbf{v}) = v_1 A\mathbf{b_1} + v_2 A\mathbf{b}_2 + ... + v_p A\mathbf{b}_p.$$

Vi får

$$C = [A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ ... \ A\mathbf{b}_p]$$

A er en $m \times n$ matrise og B er en $n \times p$ matrise, C kalles produktet av A og B, det er en $m \times p$ matrise.

Matrisemultiplikasjon

Hvis $A = [a_{ij}]$ er en $m \times n$ matrise og B er en $n \times p$ matrise, så er AB matrisen av størrelsen $m \times p$ der elementet i i-te rad og j-te kolonne er indreproduktet av i-te rad i A og j-te kolonne i B,

$$AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}].$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + -2 \cdot 7 \\ -5 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 & -5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -18 & 2 \end{bmatrix}$$

Addisjon av matriser

Hvis $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ er matriser av samme størrelse, så er summen $A + B$ matrisen som vi får ved å legge sammen samsvarende elementer i A og B,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Multiplikasjon av en matrise med et tall

Hvis $A = [a_{ij}]$ er en matrise og c er et tall, så er cA matrisen som vi får ved å multiplisere hvert element i A med c,

$$cA = [ca_{ij}].$$

Eksempel

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -15 & 0 \end{bmatrix}$$

Regler for matriseregning

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + (-1)A = (-1)A + A = 0$$

$$(a + b)A = aA + bA, \quad (ab)A = a(bA), \quad a(A + B) = aA + aB$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad AB \neq BA$$

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC$$

Hvis A er en $m \times n$ matrise så er

$$AI_n = I_mA = A,$$

hvor I_n og I_m er $n \times n$ og $m \times m$ identitesmatrisene.

Transponering

Hvis A er en $m \times n$ matrise, $A = [a_{ij}]$ så defeneres den transponerte matrisen til A som $A^T = [a_{ji}]$. (Kolonnene til A blir radene til A^T og omvent).

$$(A^T)^T = A, \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(cA)^T = cA^T, \quad (AB)^T = B^T A^T$$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Oppsummering

Vi har lært:
Matriseregning, den transponerte matrisen

Lærebok: 2.1

Nest gang
Inverse matriser

Lærebok: 2.2, 2.3