NTNU

Det skapende universitet

Foiler i Matematikk 3

Hans Jakob Rivertz
Institutt for matematiske fag

11. mars 2013

Innhold

NTNU
Det skapende universitet

Oversikt

4.1 Vektorrom og underrom

4.2 Nullrom, kolonnerom og lineære transformasjoner

NTNU
Det skapende universitet

Vektorrom

Definisjon (Vektorrom)

En mengde V med operasjonene addisjon og skalar multiplikasjon kalles et **vektorrom** hvis følgende *aksiomer* er oppfylt for alle **u**, **v**, **w** i V og alle skalarer a og b i $\mathbb{R}$.

1. Summen $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Kommutativ lov)
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Assosiativ lov)
4. Det finnes en $\mathbf{0}$ i V slik at $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in V$.
5. For hver $\mathbf{v}$ i V så finnes en $-\mathbf{v}$ i V slik at $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
6. $a\,\mathbf{v} \in V$.
7. $a\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\,\mathbf{u} + a\,\mathbf{v}$. (Distributiv lov)
8. $(a + b)\,\mathbf{v} = a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{v}$. (Distributiv lov)
9. $a\,(b\,\mathbf{v}) = (a\,b)\,\mathbf{v}$.
10. $1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

NTNU
Det skapende universitet

Entydighet av null og negativ vektor

Teorem (Entydighet av $\mathbf{0}$)

Hvis V er et vektorrom så finnes et bare en vektor $\mathbf{0}$ med egenskapen i aksiom 4.

Teorem (Entydighet av $-\mathbf{v}$)

For hver vektor $\mathbf{v}$ i V finnes bare en vektor $-\mathbf{v}$ med egenskapen i aksiom 5

Teorem (Noen enkle konsekvenser)

For hver vektor $\mathbf{u} \in V$ og skalar c;

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ c\mathbf{0} &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v} \end{aligned}$$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempler på vektorrom

- $\mathbb{R}^n$ er et vektorrom når $n \geqslant 1$.
- Mengden av alle konvergente følger er et vektorrom.
- Mengden $M_{m\times n}$ av alle $m \times n$ matriser danner et vektorrom.
- Mengden $\mathbb{P}_n$ av alle polynomer med grad mindre eller lik n danner et vektorrom.
- Mengden av alle reelle funksjoner definert på $\mathbb{R}$ danner et vektorrom.
- Mengden av alle kontinuerlige reelle funksjoner definert på intervallet $[0, 1]$ danner et vektorrom.

NTNU
Det skapende universitet

Underrom

Definisjon

En undermengde W av V kalles et **underrom** av V hvis W selv er et vektorrom.

Teorem

En undemende av W av V er et underrom av V hvis og bare hvis følgende to betingelser er oppfyllt

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *er med i W hver gang* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *er med i W*
2. $a\,\mathbf{u}$ *er med i W hver gang* $\mathbf{u}$ *er med i W og a er en skalar.*

Korollar

Hvis W er et underrom av V så er $\mathbf{0}$ *med i W.*

NTNU
Det skapende universitet

Eksempler på underrom

Eksempel (Null-underrommet)

Mengden $\{\mathbf{0}\}$ *som består av bare nullvektoren er et underrom av* V.

Eksempel (Uegentlige underrom)

Mengden V *selv er et underrom av* V.

Eksempel (Linjer i planet)

Rette linjer igjennom origo ($\mathbf{0}$) *er underom av* $\mathbb{R}^2$

Eksempel (Linjer og plan i rommet)

Rette linjer og plan igjennom origo ($\mathbf{0}$) *er underom av* $\mathbb{R}^3$

NTNU
Det skapende universitet

Lineær kombinasjon og lineære spenn

Definisjon

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 \cdots a_k\mathbf{v}_k$$

kalles en lineær kombinasjon av vektorene $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ i V. Mengden av alle mulige lineærkombinasjoner av S kalles det lineære spennet av S. Vi skriver $\mathrm{Span}(S)$.

Teorem

Span(S) er et underrom av V. Vi kaller Span(S) for underommet generert av vektorene i S.

NTNU
Det skapende universitet

Oversikt

4.1 Vektorrom og underrom

4.2 Nullrom, kolonnerom og lineære transformasjoner

NTNU
Det skapende universitet

Nullrommet til en matrise

Definisjon

Nullrommet til en $m \times n$-matrise A er mengden av alle løsninger til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Vi kaller dette for $\mathit{Null}(A)$.

Teorem

$\mathit{Null}(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

NTNU
Det skapende universitet

Kolonnerommet til en matrise

Definisjon

Kolonnerommet til en $m \times n$-matrise A mengden utspennt av søylene til A. Vi kaller dette for $Col(A)$.

Teorem

$Col(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$.

NTNU
Det skapende universitet

Lineær transformasjon

Definisjon

En lineær transformasjon T fra et vektorrom V inn i et vektorrom W er en regel som til hver vektor $\mathbf{x}$ i V tilordner en entydig vektor $T(\mathbf{x})$ i W slik at

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i V og
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u}$ i V og alle skalarer c.

Definisjon

Kjernen ker T til en lineær transformasjon T er mengden av alle vektorer $\mathbf{v}$ i V med $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

NTNU
Det skapende universitet