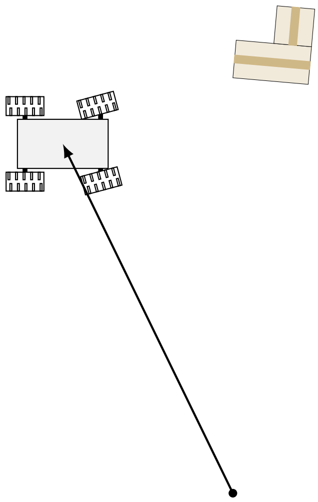
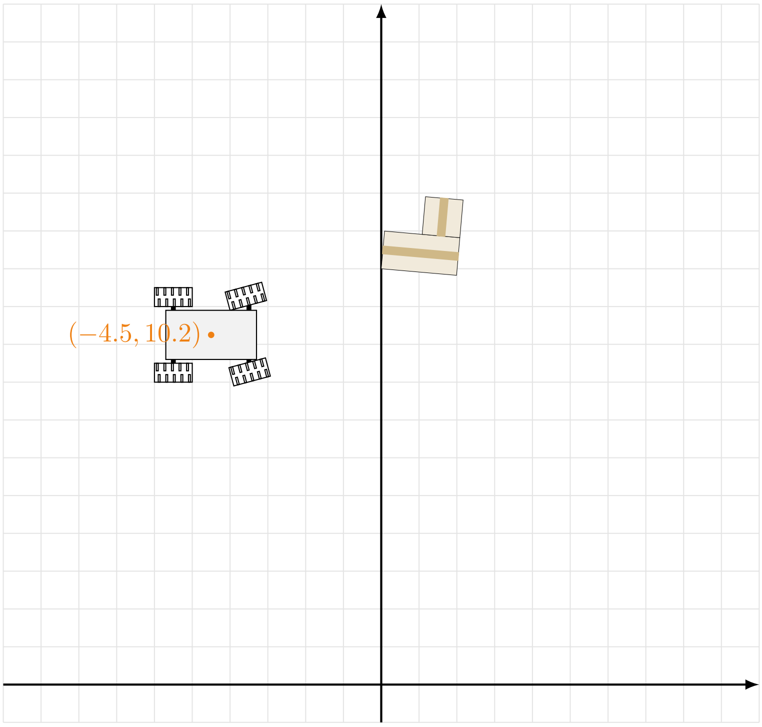
# 2. Vektorer og matriser

Vektorer når vi først møter dem presenteres ofte som en størrelse med en retning. For eksempel en posisjonsvektor til en robot i et lager kan være avstanden til ett definert sentrum og retningen man må gå ut fra det sentrumet for å støte på roboten.



Introduserer vi koordinater for lagergulvet, så kan vi beskrive posisjonen til roboten ved hjelp av koordinatene til punktet der den er.




I grunn er det unødvendig å skille mellom punkter og vektorer i planet ($\mathbb{R}^2$), eller i høyere dimensjonale Euklidske rom ($\mathbb{R}^n$), så vi gjør ikke det videre. Eneste er at vi for vektorer ofte vil skrive koordinatene som en **søylevektor/kolonnevektor**, så i stedet for

$$(x, y)$$

så skriver vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vi kaller ofte koordinatene til en vektor for **elementer**. Vektorer kan ha elementer som beskriver andre ting enn kun romslige koordinater. Noen ganger har vi kanskje lyst til å kun vite hvor langt en robot er fra et gitt punkt $s$ og hastigheten den beveger seg til eller fra det punktet $v$. Da kan vi i så fall lagre dette i en vektor hvor første element er avstand og andre er hastighet

$$\begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix}$$

Begge disse størrelsene er tidsavhengige, så vi kan godt også angi det i vektoren

$$\begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t) \\ s'(t) \end{bmatrix}.$$

Vi ser altså at vektorer kan ha funksjoner som elementer.

Nå kan dere få jobbe litt med vektorer.

## Oppgave 1

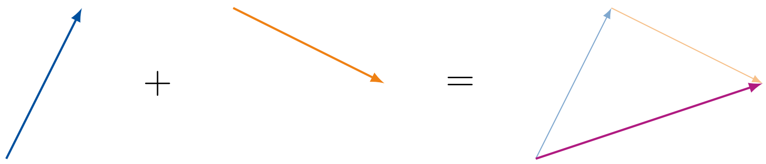
Regn ut følgende

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $3 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

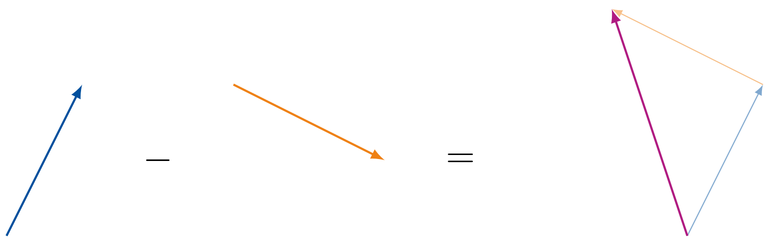
Addisjon og subtraksjon av vektorer gjøres elementvis, så svaret på c) er

$$\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10-(-1)\\1-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\0\end{bmatrix}$$

Hvis vi skal visualisere addisjon av vektorer så må vi først kaste fra oss det at en vektor nødvendigvis begynner i origo. Nå som vi har gjort det så kan vi se på addisjon som at vi først følger den ene vektoren før vi så følger den andre; summen er da vektoren som går fra startpunktet til første til sluttpunktet til den andre.



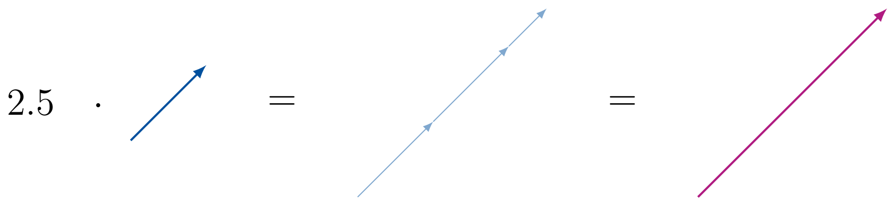
Subtraksjon blir så at vi snur ene vektoren før vi adderer de sammen:



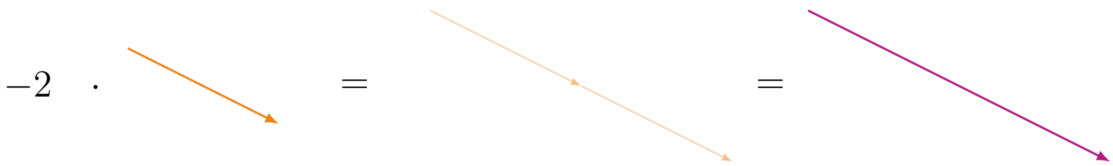
I siste oppgave skulle dere utføre skalarmultiplikasjon. Det fungerer ved at vi tar et tall og multipliserer det med hvert av elementene i vektoren:

$$3 \cdot \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 4\\3\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\15\end{bmatrix}$$

Skalarmultiplikasjon kan visualiseres som at vi skalerer vektoren med en viss faktor. Skalerer vi med et positivt tall, er det så enkelt som å addere sammen så mange kopier som faktoren tilsier

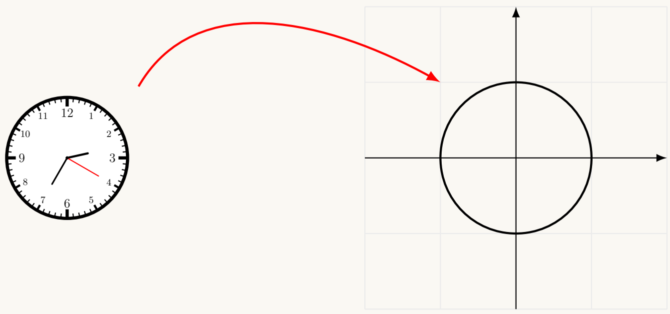



Skalerer vi med et negativt tall så legger vi sammen så mange kopier av den omsnudde vektoren som absoluttverdien av tallet tilsier

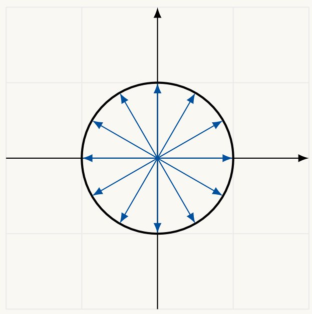



### Oppgave 2

Vi ser på klokken plassert inn i enhetssirkelen i $xy$-planet.



Hva er summen av vektorene som går fra origo til timene i klokken?



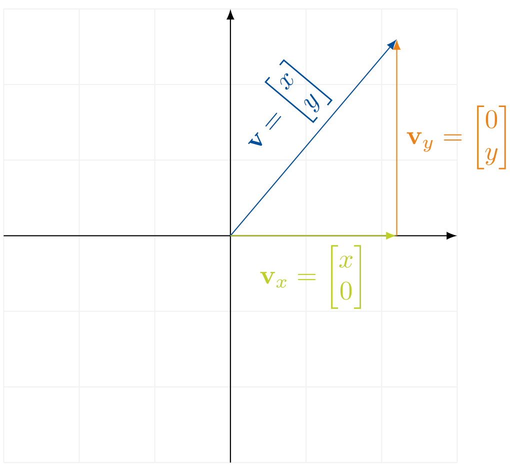
Enn om vi summerer over alle vektorene utenom den som ender i klokkeslettet $3:00$?

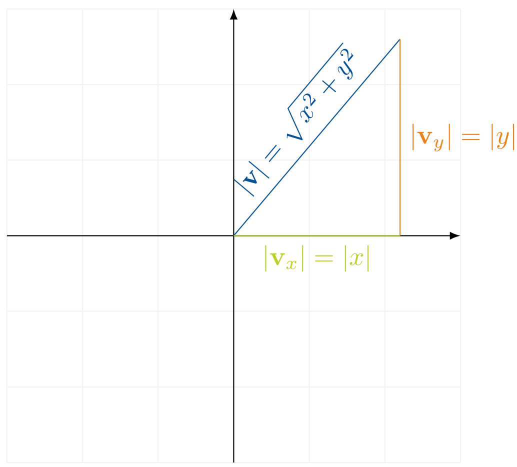
## Lengde og prikkprodukt

Hvis vi har en vektor $\mathbf{v}$ på koordinatform $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, og vil finne **lengden** til den, hvordan gjør vi det? Vi kan enten huske at svaret er gitt ved

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

eller huske hva Pytagoras en gang sa; i en rettvinklet trekant er lengden av hypotenusen gitt ved kvadratroten av sidelengdene. For hvis vi dekomponerer (projiserer på enhetsvektorene) vektoren vår se får vi at de to komponentene er sider i en rettvinklet trekant med vår originale vektor som hypotenus.




For et vanlig tall så har vi at *lengden* eller mer normalt **absoluttverdien** kan skrives som kvadratroten av sin andrepotens;

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & , \text{ hvis } a \geq 0 \\ -a & , \text{ hvis } a < 0 \end{cases}$$

La oss nå introdusere en måte vi kan *multiplisere* to vektorer på som gir oss samme egenskap, altså

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{2.1}$$

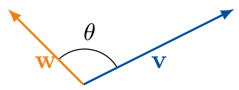
Hvis vi har to vektorer $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, så er **prikkproduktet** av dem gitt som

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Vi kan nå lett se at prikkprodukt gir oss akkurat det vi ønsket i 2.1. Når vi først har innført prikkproduktet så kan vi utlede flere egenskaper ved det. Først kan vi overbevise oss om at lengden til en skalert vektor er lik original lengde multiplisert med absoluttverdien av skalaren:

$$|a\mathbf{v}| = \left| \begin{bmatrix} av_1 \\ av_2 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(av_1)^2 + (av_2)^2} = |a| \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |a|\,|\mathbf{v}|$$

Husk at vinkelen mellom to vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^2$ er gitt ved den minste vinkelen vi får når vi tegner dem med samme startpunkt.




## Resultat 2.0.1

La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vinkelen $\theta$ mellom dem er gitt ved

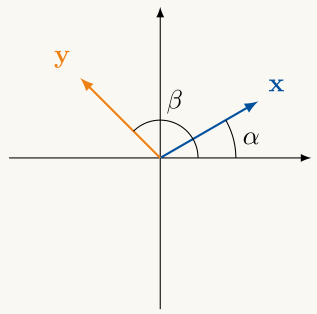
$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$$

## Hvorfor

La oss først arbeide med to vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ med lengde 1. Da vil de ligge på enhetssirkelen. Husk fra Seksjon forkunnskapsnotatet at vi da per definisjon har

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

hvor $\alpha$ og $\beta$ er vinklene mellom positiv $x$-akse og vektorene.




Differansen $\beta - \alpha$ er (opp til fortegn) lik $\theta$, så vi bruker cosinussummasjons-setning til å få

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha) \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_2 \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

Vektorene $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ har ikke nødvendigvis lengde 1, så vi kan benytte oss av at vinkelen mellom to vektorer er lik selv om vi skalerer vektorene. Vi konstruerer vektorene $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ og $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$, som har lengde 1:

$$|\mathbf{x}| = \left|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}| = 1$$

Fra diskusjonen over har vi dermed at

$$\cos(\theta) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$$

## Merknad

I et høyeredimensjonalt vektorrom $\mathbb{R}^n$ så er prikkprodukt definert tilsvarende, nemlig

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

Lengden av en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ defineres likt

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Mens vinkelen mellom to vektorer defineres ved hjelp av formelen vi hadde over for det 2-dimensjonale tilfellet, nemlig

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}\right)$$

For å kunne definere vinkelen slik så beviser man først *Cauchy-Schwarz ulikheten*, som sier at

$$-1 \leq \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|} \leq 1$$

## Oppgave 3

For vektorene

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Regn ut følgende

a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

b) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{x})$

c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$

d) $|\mathbf{v}|$

e) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|$

f) Vinkelen mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{v}$

Det du kan ha observert allerede er at prikkprodukt er distributivt over addisjon. Det er mattelingo for at vi kan løse opp parenteser:

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}\,.$$

Vi har også andre egenskaper, blant annet at å skalarmultiplikasjon oppfører seg pent med prikkprodukt. Altså

$$a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w})$$