Oppgaver Torsdag 10. august

1 Gitt vektorene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Avgjør hvilke av følgende mengder er lineært uavhengige

a) $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}$ b) $\{\mathbf{x}, \mathbf{w}\}$ c) $\{\mathbf{y}, \mathbf{v}\}$ d) $\{\mathbf{y}, \mathbf{w}\}$ e) $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}\}$

2 Gitt vektorene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for underrommet $U = \text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}\}$

b) Er vektoren

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

i underrommet U?

c) Løs, om mulig, likningen

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

3 Finn basis til kolonnerommet, radrommet og nullrommet av følgende matriser

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4 Finn determinanten til følgende matriser og avgjør om de er inverterbare

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Løsning Torsdag 10. august

1

a)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \implies \text{lineært uavhengig.}$$

eller

$$\begin{vmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 0\cdot 2 = 2 \neq 0 \implies \text{lineært uavhengig.}$$

b)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix} \implies \text{lineært avhengig.}$$

eller

$$\begin{vmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{w}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 0\cdot(-1) = 0 \implies \text{lineært avhengig.}$$

c) Lineært avhengig

d) Lineært uavhengig

e) Vektorene ligger i et todimensjonalt rom. Det maksimale antall lineært uavhengige vektorer vi kan ha i et todimensjonalt rom er 2, ellers ville rommet hatt høyere dimensjon. Altså kan ikke mengden være lineært uavhengig.

2

a) Vi sjekker først om vektorene er lineært uavhengige.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 2 & 2\\0 & 2 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{vmatrix} = 2+4 = 6 \neq 0$$

Determinanten er ulik null, så vektorene er lineært uavhengige. Siden de per definisjon også utspenner U, er $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$ en basis.

b) Siden U har dimensjon 3 og er ett underrom av $\mathbb{R}^3$, må $U = \mathbb{R}^3$. Siden $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ må også $\mathbf{w} \in U$.

c) Vi løser likningen ved å radredusere

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 4\\2 & 2 & 2 & 5\\0 & 2 & 3 & 6\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2}\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

Altså er $a = 1$, $b = -\frac{3}{2}$ og $c = 3$.

3

a) Basis for kolonnerom er

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Basis for radrom er

$$\begin{bmatrix}1\\5\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Basis for nullrom er

$$\begin{bmatrix}-5\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

b) Basis Col(A):

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

Basis Row(A):

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Basis Null(A):

$$\varnothing$$

c) Basis Col(A):

$$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}$$

Basis Row(A):

$$\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}$$

Basis Null(A):

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

d) Basis Col(A):

$$\begin{bmatrix}0\\2\\-8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Basis Row(A):

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Basis Null(A):

$$\varnothing$$

e) Basis Col(A):

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Basis Row(A):

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Basis Null(A):

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$

a) $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{vmatrix} = 1 \cdot 2 = 2$. Altså er matrisen inverterbar.

b) $\begin{vmatrix}2 & 2 & 4\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 3\end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$. Så matrisen er inverterbar.

c) $\begin{vmatrix}5 & 9\\2 & 3\end{vmatrix} = 15 - 18 = -3$. Så matrisen er inverterbar.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 7 = 8$. Så matrisen er inverterbar.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Så matrisen er inverterbar.

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$. Så matrisen er ikke inverterbar.