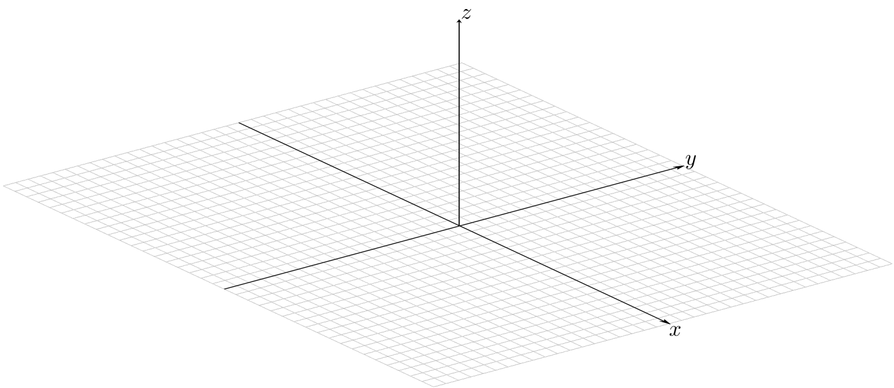
1. Underrom

Vi har jobbet frem til nå i et n-dimensjonalt vektorrom $\mathbb{R}^n$. I et vektorrom kan vi finne undermengder av vektorer som oppfører seg som et vektorrom selv. For eksempel i $\mathbb{R}^3$ kan vi finne igjen $\mathbb{R}^2$. Enkleste måten å se $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ er ved å kun se på vektorer med 0 i tredje-koordinat.



Mer eksplisitt kan vi skrive det som

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Eventuelt

$$\left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Generelt vil alle plan som inneholder origo være et underrom av $\mathbb{R}^3$, samt alle linjer som går gjennom origo.

Vi kan utlede visse krav for at en undermengde av vektorer skal være et vektorrom. Slå gjerne opp på wikipedia eller i en lærebok for å finne ut hvor disse kravene kommer fra.

Definisjon

La U være en ikke-tom undermengde av $\mathbb{R}^n$. Hvis vi

1. for alle vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in U$, har at summen $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ også ligger i U,
2. for enhver vektor $\mathbf{v} \in U$ og enhver skalar a, har at den skalerte vektoren $a\mathbf{v}$ også ligger i U, og
3. nullvektoren ligger i U

så er U et **underrom** av $\mathbb{R}^n$. Spesielt vil U selv være et vektorrom.

Oppgave 1

La $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vis at mengden

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \right\}$$

er ett underrom av $\mathbb{R}^2$.

Vi behøver egentlig ikke å vite formen på $\mathbf{y}$ for å vise dette. For enhver vektor $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ vil denne mengden være ett underrom. Den er faktisk så essensiell i lineær algebra at vi har gitt den et eget navn, nemlig **det ortogonale komplementet** av $\mathbf{y}$. Vi verifiserer det nå både eksplisitt for den oppgitte $\mathbf{y}$, og så generelt for en generell $\mathbf{y}$ og generell $\mathbb{R}^n$.

Svar

Eksplisitt:

1. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ begge ligge i U. Med andre ord vet vi at

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1 + v_2 = 0$$

og

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = u_1 + u_2 = 0.$$

La oss se på summen $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{bmatrix}$. Vi sjekker prikkproduktet med $\mathbf{y}$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (v_1 + u_1) + (v_2 + u_2) \\ &= v_1 + v_2 + u_1 + u_2 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså ligger $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ også i U.

2. Vi lar $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ ligge i U og a være en tilfeldig skalar. Vi har

$$\begin{aligned}(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} ay_1 \\ ay_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= ay_1 + ay_2 \\ &= a(y_1 + y_2) \\ &= a0 \\ &= 0\end{aligned}$$

altså ligger $a\mathbf{v}$ også i U.

3. Dette er egentlig et overflødig krav, siden det allerede dekkes av punkt 2., la for eksempel skalaren $a = 0$.

Generell:

1. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$ begge ligge i $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Da har vi

$$(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = 0 + 0 = 0$$

hvor vi brukte at prikkprodukt er distributivt.

2. La $\mathbf{v}$ ligge i $U \subseteq \mathbb{R}^n$ og a være en skalar. Da har vi

$$(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}) = a0 = 0$$

3. Dette punktet er fortsatt overflødig.

Lineær utspenning

La oss se på en flott klasse av underrom.

Definisjon

La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \in \mathbb{R}^n$, være en samling vektorer i $\mathbb{R}^n$. La $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t)$ være mengden av alle lineærkombinasjoner av vektorene, altså;

$$\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t) = \{a_1 v_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_t\mathbf{v}_t \mid a_1, a_2, \ldots, a_t \in \mathbb{R}\}$$

Vi kaller denne mengden for **den lineære utspenningen** av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$.

Oppgave 2

Vis at $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t) \subseteq \mathbb{R}^n$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$ for enhver samling av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \in \mathbb{R}$

Basis

En måte å beskrive ett underrom på er å fortelle hva de minste bestanddelene av underrommet er. Det er nettopp det en basis er.

Definisjon

La U være et underrom av $\mathbb{R}^n$. En **basis** til U er en samling vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ i U som

- er lineært uavhengige
- utspenner hele rommet; altså

$$\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t) = U$$

Hvis en basis av U inneholder t vektorer, sier vi at **dimensjonen** til U er t.

Det andre punktet i definisjonen sier at vektorene til sammen gir nok informasjon til å bygge hele underrommet, og det første punktet sier at de ikke gir oss noe overflødig informasjon.

Resultat 1.0.1

Enhver basis for et underrom U inneholder like mange vektorer. Ekvivalent, dimensjonen til et underrom er veldefinert.

Eksempel 1.0.1

Vektorrommet $\mathbb{R}^2$ har dimensjon 2 og de to vektorene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gir en basis av $\mathbb{R}^2$.

Vektorrommet $\mathbb{R}^3$ har dimensjon 3 og de tre vektorene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gir en basis til $\mathbb{R}^3$.

Vektorrommet $\mathbb{R}^n$ har dimensjon n og en basis er

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Basisene over kalles standardbasisene til $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^n$.

Underrom av en matrise

Til en matrise har vi flere tilhørende underrom. En av dem vil spille en nøkkelrolle i morgen; nemlig nullrommet.

Definisjon

La A være en $m \times n$-matrise. **Nullrommet** til en matrise A er alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Altså

$$\text{Null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Oppgave 3

Vis at Null(A) er et underrom.

Neste underrom av interesse er av større interesse i et generelt lineær algebra-kurs, men skal nok spille en grei rolle for også.

Definisjon

La A være en $m \times n$-matrise. Kolonnerommet til A er alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en

løsning. Altså
$$\mathrm{Col}(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ slik at } A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

Vi kan også observere at $\mathrm{Col}(A)$ er rommet utspent av kolonnene i A. Husk at vi definerte matriseproduktet $A\mathbf{x}$ slik at det følgende stemmer. La $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ være kolonnene i A, og $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$, da er

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Altså har vi
$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

Det siste underrommet vi skal se på er radrommet til A.

Definisjon

La $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ være radvektorene til A. **Radrommet** til A er gitt ved

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m)$$

Oppgave 4

Vis at $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$.

Eksempel 1.0.2

La A være følgende matrise:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

La oss forsøke å beskrive nullrommet, kolonnerommet og radrommet til A.

For å finne nullrommet løser vi likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Det gjør vi ved å radredusere A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har tre frie variabler, og den generelle løsningen er:

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\text{Null}A = \text{span}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-3\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Vektorene over er også lineært uavhengige, så de gir oss en basis for nullrommet. Faktisk vil vektorene vi får på denne måten alltid være lineært uavhengige, og dermed alltid gi oss en basis.

Fra definisjonen av kolonnerom og radrom får vi følgende mengder:

$$\text{Col}A = \text{span}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\2\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\7\\5\\15\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$\text{Row}A = \text{span}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\3\\7\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\\5\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\6\\6\\15\\3\end{bmatrix}\right)$$

Vi vil nok likevel helst ha en basis og ikke bare en utspennende mengde. Det viser seg at måten vi finner disse basisene på er ved å nettopp radredusere A.

La oss begynne med å se på kolonnerommet. I den radreduserte matrisen har vi ledende enere i første og tredje kolonne. Hvis vi bytter om på kolonnene i A slik at første og tredje kolonne står fremst, før vi radreduserer får vi

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 1 & 2 & 2 & 0\\2 & 3 & 4 & 7 & 1\\1 & 2 & 2 & 5 & 1\\3 & 6 & 6 & 15 & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 2 & -1 & -1\\0 & 1 & 0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Gi kolonnene i A navnene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$. Den reduserte matrisen forteller oss at kolonnene uten ledende ener, det vil si $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ og $\mathbf{a}_5$, kan skrives som en lineærkombinasjon av kolonnene med ledende ener, $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{a}_2 = 2 \cdot \mathbf{a}_1,\ \ \mathbf{a}_4 = (-1) \cdot \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_3,\ \ \mathbf{a}_5 = (-1) \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_3.$$

Spesielt vil kolonnene uten ledende ener ligge i rommet utspent av kolonnene med ledende ener. Vi har altså

$$\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}.$$

Rommet utspent av alle kolonnene i A, altså $\text{Col}(A)$, er derfor lik rommet utspent av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$. I tillegg, den reduserte matrisen til A viser at $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$ er lineært uavhengige.

Vi konkluderer med at

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\\6\end{bmatrix}\right)$$

er en basis av kolonnerommet $\text{Col}A$.

Det er noe enklere å finne en basis for radrommet. Vi observerer at når vi utfører radoperasjoner på en matrise forandres ikke radrommet.

Derfor er det nok å se på den radreduserte matrisen til A for å finne basis til radrommet. Vi har at

$$\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\\1\end{bmatrix}\right)$$

er en basis for radrommet $\mathrm{Row}A$.

Resultat 1.0.2

Eksempelet viser oss en metode for å konstruere en basis til kolonnerommet av matrisen A:

1. Reduser A til radredusert form.
2. Identifiser kolonnene med ledende enere.
3. De tilsvarende kolonnene i originalmatrisen gir en basis til $\mathrm{Col}A$.

Advarsel: Husk at vi i siste steget må gå tilbake til originalmatrisen. Radoperasjoner vil forandre kolonnerommet.

Resultat 1.0.3

La A være en $m \times n$-matrise, og la E være den radreduserte matrisen. Da har vi:

(a) Dimensjonen til nullerommet, $\mathrm{Null}A$, er lik antall frie variabler vi får når vi løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, som igjen er lik antall kolonner uten ledende ener i E.

(b) Dimensjonen til kolonnerommet, $\mathrm{Col}A$, er lik antall kolonner med ledende ener i E.

(c) Dimensjonen til radrommet, $\mathrm{Row}(A)$, er lik antall rader ulik null i E.

Resultat 1.0.4

La A være en matrise. Kolonnerommet og radrommet til A har lik dimensjon

$$\dim \mathrm{Col}A = \dim \mathrm{Row}A$$

Dette tallet, som er lik dimensjonen til både kolonne- og radrommet kalles **rangen** til A.

$$\mathrm{rank}A = \dim \mathrm{Col}A = \dim \mathrm{Row}A$$

Hver kolonne i den radreduserte matrisen har enten en ledende ener eller gir en fri variabel for likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dermed får vi følgende resultat.

Resultat 1.0.5

La A være en $m \times n$-matrise. Da har vi

$$\dim \mathrm{Null}A + \mathrm{rank}A = n.$$