1. System av differensialligninger

Vi tar nå et steg tilbake. Vi begynte reisen vår med differensiallikninger og nå skal vi tilbake. Eneste forskjell er at nå skal vi se på hele systemer av lineære differensiallikninger.[1]

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{aligned}$$

Her er $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ deriverbare funksjoner av t, og for enkelthetsskyld antar vi at a_{ij} er reelle konstanter.

Merknad

Vi har her begrenset oss til tilfellene hvor koeffisientene er konstante og systemet er homogent. Generelt er ting mer komplisert, men det blir for mye å lære i dette kurset.

Nå kommer det magiske. Legger vi godviljen til kan vi akseptere at disse systemene kan skrives om på matriseform. Altså

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

[1] Behøver du noen eksempler på hvor disse dukker opp, sjekk fra side 50 i boken om Reguleringsteknikk: `https://folk.ntnu.no/tronda/regtek-kurs/bok-reguleringsteknikk.pdf`

Hvis vi lar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{og } \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

så kan vi skrive systemet som matriselikningen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

La oss nå tenke tilbake til hvordan dette så ut da vi kun hadde én likning,

$$\dot{x} = ax,$$

Den hadde løsninger gitt ved

$$x(t) = Ce^{at}$$

for konstanter C. Naivt nok kan vi nå tro at

$$e^{At}$$

er en løsning på $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. I så fall må vi finne ut hva denne eksponenten faktisk er. For å gjøre det går vi tilbake til den ordinære eksponentialfunksjonen. På et tidspunkt så vi at vi kan uttrykke den med en Taylor-utvikling:

$$e^{at} = (at)^0 + (at)^1 + \frac{1}{2}(at)^2 + \frac{1}{6}(at)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(at)^k + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}.$$

Substituer nå inn A for a, og vi får

$$e^{At} = I_n + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{6}(At)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(At)^n, \qquad \text{hvor } (At)^0 = I_n.$$

La oss nå se på hva som skjer om vi deriverer dette uttrykket[2].

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(At)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n!}A^n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n A^n t^{n-1} = Ae^{At}.$$

Forhåpentligvis kan vi nå akseptere følgende resultat:

Resultat 1.0.1 Eksistens og entydighet

For alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

har den entydige løsningen

$$\mathbf{x} = e^{At}\mathbf{x}_0$$

1.1. Matriseeksponent

Egenskaper

Før vi tar fatt på å regne ut matriseeksponenter lister vi opp noen nyttige egenskaper for matriseeksponenten. Først ser vi egenskapen vi 'utledet' over.

[2] Vi kan godt merke oss at vi ikke gjør noe her rigorøst. Derivasjon har vi heller ikke sagt noe større om hvordan fungerer, men vi kan godt gå ut i fra at det fungerer som for endimensjonale funksjoner.

Teorem 1.1.2

La A være en $n \times n$-matrise, da har vi

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

Så får vi

Teorem 1.1.3

Eksponentialen av nullmatrisen er identitetsmatrisen,

$$e^{0_n} = I_n.$$

Videre har vi at for alle kvadratiske matriser A, er matriseeksponenten, e^{At}, inverterbar og inversen er gitt ved

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

Dessverre, lar ikke $e^{a+b} = e^a e^b$ seg generalisere generelt, men kun for spesialtilfeller:

Teorem 1.1.4

Hvis $AB = BA$, har vi

$$Ae^B = e^B A,$$
$$e^A e^b = e^b e^A$$

og

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Utregne matriseeksponent

Hvis vi har en invertibel matrise P og en matrise B slik at A kan skrives som $A = PBP^{-1}$, så har vi

$$\begin{aligned}
e^{At} =& e^{PBP^{-1}t} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(PBP^{-1}t)^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(P(Bt)P^{-1})^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}P(B^n t)P^{-1} \\
=& P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}B^n t\right)P^{-1} \\
=& Pe^{Bt}P^{-1}.
\end{aligned}$$

I tillegg om $B = D$ er en diagonalmatrise, det vil si hvis A er diagonaliserbar, kan vi eksplisitt finne e^{Dt} som

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & \Large 0 \\ & \ddots & \\ \Large 0 & & e^{d_n t} \end{bmatrix}.$$

La oss nå regne ut eksponenten for 2×2-matriser.

Diagonaliserbare matriser

Eksempel 1.1.1

Finn matriseeksponenten e^{At} av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Løs så initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fra oppgave 1c på fredag vet vi at A er diagonaliserbar med egenverdier $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -1$, og tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dermed har vi at $A = PDP^{-1}$ hvor

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Inversmatrisen P^{-1} er gitt ved

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bruker vi dette og hva vi lærte over ser vi at

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{PDtP^{-1}} = Pe^{Dt}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi vet at løsningene av initialverdiproblemet har løsning gitt ved

$$\mathbf{x} = e^{At}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-t} \end{aligned}$$

Diagonaliserbar med komplekse egenverdier

Komplekse tall hjelper oss med mye, men det å regne med dem kan være ett herk. La oss dermed se på hvordan vi kan forenkle ting. Vi begynner med å dra et resultat ut av en hatt uten å rettferdiggjøre eller utbrodere.

Resultat 1.1.5

La A være en reell 2×2-matrise med kompleks egenverdi $\lambda = a - bi$, $b \neq 0$, og la $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ være tilhørende egenvektor. Vi kan da faktorisere A som følger:

$$A = PCP^{-1} \text{ med } P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\mathbf{v} & \mathrm{Im}\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

og

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Matrisen C er spesielt fin, siden vi kan skrive den som summen

$$C = aI + bS = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan observere at aI og bS kommuterer, og dermed vet vi at

$$e^{Ct} = e^{aIt + bSt} = e^{aIt} e^{bSt}.$$

Den første faktoren i produktet over vet vi at er lik $e^{at}I$, så vi får

$$e^{Ct} = e^{at} I e^{bSt} = e^{at} e^{bSt}.$$

Vi fokuserer dermed på beskrive siste faktoren. Først kan vi observere at $S^4 = I$:

$$S^0 = I_2, \quad S^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_2, \quad S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -S$$

$$S^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2, \quad S^5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = S, \quad S^6 = -I_2 = S^2, \quad S^7 = -S = S^3, \quad \ldots$$

I Taylorutviklingen av e^{bSt} kan vi gruppere sammen de jevne og odde potensene av S, og dermed ende opp med

$$\begin{aligned} e^{bSt} = &\left(1 - \frac{1}{2!}(bt)^2 + \frac{1}{4!}(bt)^4 - \frac{1}{6!}(bt)^6 + \frac{1}{8!}(bt)^8 - \cdots\right) I_2 \\ &+ \left(bt - \frac{1}{3!}(bt)^3 + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}(bt)^7 + \frac{1}{9!}(bt)^9 - \cdots\right) S \end{aligned}$$

Ser vi nøye på dette kan vi begynne å ane at vi har sett summene i parentesene før. Etter ennå litt nistirring og muligens en konsultasjon med internett oppdager vi at den første summen er Taylorutviklingen av $\cos(bt)$

$$\cos(bt) = 1 - \frac{1}{2!}(bt)^2 + \frac{1}{4!}(bt)^4 - \frac{1}{6!}(bt)^6 + \frac{1}{8!}(bt)^8 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

og den andre delen er Taylorutviklingen til $\sin(bt)$

$$\sin(bt) = bt - \frac{1}{3!}(bt)^3 + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}(bt)^7 + \frac{1}{9!}(bt)^9 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Dermed ser vi at

$$e^{bSt} = \cos(bt) I_2 + \sin(bt) S = \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

Nå legger vi alt dette sammen til et stort resultat.

Resultat 1.1.6

La A være en reell 2×2-matrise med kompleks egenverdi $\lambda = a - bi$ og tilhørende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Da har vi

$$e^{At} = e^{at} P R_b P^{-1}.$$

Hvor

$$P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{v}) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad R_b = \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Eksempel 1.1.2

Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Egenverdiene er $\pm i$. Verifiser selv at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende $-i$. Vi finner

$$\mathrm{Re}\mathbf{v} = \mathrm{Re} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(-i) \\ \mathrm{Re}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathrm{Im}\mathbf{v} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Im}(-i) \\ \mathrm{Im}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får da at

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Løsningen av initialverdiproblemet er

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

Eksempel 1.1.3

Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Matrisen har kompleks egenverdi $\lambda = 1 - i$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi får at

$$e^{At} = e^{t} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

og dermed løsningen

$$\mathbf{x}(t) = ae^t \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + be^t \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

Kun én egenverdi

Alle $n \times n$-matriser A kan skrives på formen PJP^{-1} for en inverterbar matrise P og en matrise på Jordan form J. Når matrisen er diagonaliserbar så er J diagonal og vi er tilbake til situasjonen over. La oss dermed anta at vi har en reell 2×2-matrise som ikke er diagonaliserbar. Det betyr spesielt at A har én reell egenverdi λ. Da er J på formen

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Denne matrisen kan vi skrive som summen

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda I + N$$

Spesielt vil vi da ha at

$$e^{Jt} = e^{\lambda It + Nt} = e^{\lambda t} I e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt}$$

Nå observerer vi at N^2 er nullmatrisen,

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra definisjonen av matriseeksponenten får vi nå at

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{1}{2}N^2t^3 + \frac{1}{6}N^3t^3 = I + Nt = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel 1.1.4

Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

$$A = -1I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så vi har

$$e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og dermed

$$\mathbf{x} = e^{At}\mathbf{x}(0) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -1+t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi må nå kanskje forklare hvordan vi finner de inverterbare matrisene P i produktet $A = PJP^{-1}$. Eller, vi forklarer det for 2×2-matriser. Den generelle algoritmen kan du selv søke opp og sette deg inn i om du skulle ønske.

Resultat 1.1.7

La A være en reell 2×2-matrise med kun én reell egenverdi λ. La $\mathbf{v}$ være en tilhørende egenvektor til λ, og la $\mathbf{w}$ være en løsning av likningen $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Da kan vi skrive A som produktet

$$A = PJP^{-1}$$

hvor

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad \text{og } J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Vi kaller $\mathbf{w}$ en **generalisert egenvektor av** λ.

Eksempel 1.1.5

Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Vi begynner med å finne egenverdiene til A. Det karakteristiske polynomet er $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$, så A har egenverdien $\lambda = -1$. Vi finner at A har tilhørende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Vi finner så generalisert egenvektor, $\mathbf{w}$, som løser $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Løsningen finner vi ved å radredusere den utvidede matrisen.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & 3 \\ -4 & 6 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi leser ut at $w_1 = -1/2 + 3/2t$ og $w_2 = t$. t er fri, så vi kan godt velge den til å være 0, og få

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

med kolonner $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er inverterbar med invers

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Da får vi at

$$A = PJP^{-1}$$

hvor J er matrisen fra forrige eksempel

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriseeksponenten e^{At} er derfor gitt ved

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

Og løsningen er

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}(0) \\
&= Pe^{Jt}P^{-1}\mathbf{x}(0) \\
&= e^{-t}\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= e^{-t}\begin{bmatrix} 3 & 3t-0.5 \\ 2 & 2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= e^{-t}\begin{bmatrix} 6t-1 & 1.5+9t-1.5 \\ -4t & 1+6t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$