Oppgaver Onsdag 9. august

1 Løs en av de følgende likningssystemene.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \quad\quad 2x_2 + \ \ x_3 = -8 \\ -x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 13 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$

2 Løs følgende vektorlikninger.

a) $x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

3 Avgjør om følgende matriselikning har en løsning.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4 Avgjør om $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ er lineært uavhengige når

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{og } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5 La A, B og $\mathbf{v}$ være gitt som

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Beregn (eller forklar hvorfor det ikke går) følgende

a) AB b) BA c) A^2 d) B^2

e) $A + B$ f) $(A + I_3)\mathbf{v}$ g) $BA\mathbf{v}$ h) B^T

i) $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$

6 Regn ut produktene

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Løs så matriselikningen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7 Finn produktet

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn så en løsning på matriselikningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Løsning Onsdag 9. august

$\boxed{1}$ a) Vi radreduserer totalmatrisen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Vi leser ut løsningene $x_1 = -4$, $x_2 = -5$ og $x_3 = 2$.

b) Vi radreduserer totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 13 \\ 3 & 3 & 6 & 15 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 15 \\ 2 & 3 & 4 & 13 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 13 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Vi får én fri variabel og løsningene $x_1 = 2 - 2t$, $x_2 = 3$ og $x_3 = t$

$\boxed{2}$ a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

så løsningen er $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 0$.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

så løsningen er $x_1 = 2/3$, $x_2 = 0$ og $x_3 = -1/3$.

$\boxed{3}$ Vi radreduserer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Siste linje i den radreduserte gir oss $0 = 1$, som ikke kan stemme. Vi konkluderer med at likningen ikke har en løsning.

$\boxed{4}$ Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi får en fri variabel, og konkluderer med at vektorene er lineært avhengige.

$\boxed{5}$

a) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 19 \\ -8 & -16 & -40 \end{bmatrix}$

b) $BA = \begin{bmatrix} -36 & 7 \\ -24 & 0 \end{bmatrix}$

c) Ikke mulig

d) Ikke mulig

e) Ikke mulig

f) Ikke mulig

g) Ikke mulig

h) $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

i) $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = 69$

$\boxed{6}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi løser enkelt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{7}$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og løsningen er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_1 + b_2 - b_3 \\ -b_1 + b_2 + b_3 \\ b_1 - b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$