1. Vektorer og matriser

Vektorlikninger

Nå har vi jobbet litt for lenge uten likninger, så la oss se på noen likninger igjen!

Oppgave 1

Finn x_1 og x_2 slik at

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hvis vi løser dette naivt så ender vi opp med ett likningssystem av to likninger med to ukjente. Som vi allerede vet så kan disse skrives på matriseform.

Oppgave 2

Skriv om likningen under til matriseform.

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løs den så ved hjelp av utvidet matrise.

Hvis vi nå tar vektorene og setter de som kolonner i en matrise så kan vi se på likningen over som en matriselikning;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Radreduksjon

Hvis vi har et lineært likningssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

bestående av m likninger og n ukjente, har vi en gang observert at mens vi jobber mot en løsning kan vi se vekk fra en del informasjon. Metoden er å lagre koeffisientene i en tabell og la posisjonen i tabellen angi hvilken likning de tilhører og hvilken variabel de står foran, altså skriver vi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

i stedet for likningssystemet over. Streken er en 'stand-in' for likhetstegnet. Når vi så løser systemet har vi lært en fremgangsmåte vi kaller **Gausseliminasjon**. Den baserer seg på tre tillatte operasjoner vi kan gjøre på matrisen, nemlig:

- Bytte om på to rader,
- Gange en rad med en konstant ulik 0,
- Legge til ett multiplum av en rad til en annen.

Hvis du fortsatt er foggy på detaljene kan du lese Wikipedia-siden om Gausseliminasjon: `https://no.wikipedia.org/wiki/Gauss-eliminasjon`.

Oppgave 3

Løs likningssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 4x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

Vi setter opp den utvidede matrisen til systemet og radreduserer.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Så likningssystemet har løsning

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Lineær uavhengighet

Et viktig konsept i lineær algebra er uavhengighet. Det koker essensielt ned til spørsmålet;

Spørsmål

Er noe av informasjonen min overflødig?

Hvis jeg gir deg tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ og ber deg beskrive alle vektorene du kan få som en sum av dem, hvor lite informasjon behøver du i beskrivelsen?

Oppgave 4

La følgende vektorer være gitt

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Skriv vektoren

$$\begin{bmatrix}9\\13\\17\end{bmatrix}$$

som en sum av $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ og $\mathbf{x}$. Behøver du alle tre vektorene?

En mulig løsning over er

$$\begin{aligned}2 \cdot \mathbf{v} + 3 \cdot \mathbf{w} + 1 \cdot \mathbf{x} &= 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\9\\12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}2+6+1\\2+9+2\\2+12+3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}9\\13\\17\end{bmatrix}\end{aligned}$$

men vi kunne også brukt kun to av vektorene:

$$\mathbf{v} + 4 \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix}1+8\\1+12\\1+16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\13\\17\end{bmatrix}$$

Dette fordi de tre vektorene til sammen gir unødvendig mye informasjon, eller matematisk; de er lineært avhengige.

Definisjon

La $\mathbf{v}_1, \ldots, v_t$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vi kaller dem **lineært uavhengige** hvis summen

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$$

kun holder hvis $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0$.

Hvis de ikke er lineært uavhengige kaller vi dem **lineært avhengige**.

Oppgave 5

Vis at $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ og $\mathbf{x}$ fra forrige oppgave er lineært avhengige.

Oppgave 6

Avgjør om $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ er lineært uavhengige når

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{og } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hvis $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ og $\mathbf{x}$ skal være lineært uavhengige, må eneste løsning på vektorlikningen

$$x_1\mathbf{v} + x_2\mathbf{w} + x_3\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

kun har løsning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Altså kan vi løse likningen og se om det er eneste løsning. Vi setter opp den utvidede matrisen for systemet og radreduserer.

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] &\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -9/4 & -5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Vi får altså løsningene $x_1 = -\frac{1}{9}t$, $x_2 = -\frac{5}{9}t$ og $x_3 = t$. Vi konkluderer med at vektorene ikke er lineært uavhengige.

Matrisemultiplikasjon

Nå kan vi like gjerne repetere hvordan vi multipliserer matriser.

Definisjon

La A være en $m \times n$-matrise og B en $n \times p$-matrise. Produktet AB er en $m \times p$ matrise hvor elementet $(AB)_{i,j}$ er

$$(AB)_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

Dette er det samme som å si at $(AB)_{i,j}$ er prikkproduktet av den i-te radvektoren til A og den j-te kolonnevektoren til B.

$$
m \overbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}}^{n} \times n \overbrace{\begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,j} & \cdots & b_{n,p} \end{bmatrix}}^{p} = m \overbrace{\begin{bmatrix} ab_{1,1} & \cdots & ab_{1,j} & \cdots & ab_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{i,1} & \cdots & ab_{i,j} & \cdots & ab_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{m,1} & \cdots & ab_{m,j} & \cdots & ab_{m,p} \end{bmatrix}}^{p}
$$

row i $\times$ column j $=$ (i,j)-element

Eksempel 1.0.1

En muligens enklere visualisering er følgende.

Hvis vi ønsker å multiplisere følgende matriser

$$
\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}}^{2\times 3} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}}^{3\times 2} = \overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{2\times 2}
$$

Da kan vi organisere matrisene som følger

$$
\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 3 \\ & & & 7 & 1 \\ & & & 5 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 & a & b \\ 7 & 3 & 2 & c & d \end{array}
$$

Den andre matrisen plasseres i det øvre høyre hjørne og den første matrisen i nedre venstre. Nå finner vi elementene i produktet ved å ta prikkproduktet av raden og kolonnen som peker inn mot elementet.

$$
\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 3 \\ & & & 7 & 1 \\ & & & 5 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 & a & b \\ 7 & 3 & 2 & c & d \end{array}
$$

$$a = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 29$$

$$
\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 3 \\ & & & 7 & 1 \\ & & & 5 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 & a & b \\ 7 & 3 & 2 & c & d \end{array}
$$

$$b = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 9 = 32$$

Til slutt får vi

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 32 \\ 31 & 42 \end{bmatrix}
$$

Oppgave 7

Avgjør om vi kan multiplisere følgende matriser og gjør det om mulig.

a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}$

Svar

a)

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 3 & 1 \\ & & & 0 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 19 & 5 \\ 7 & 3 & 2 & 13 & 24 & 5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}5 & 19 & 5\\ 13 & 24 & 5\end{bmatrix}}$$

b)
Antall rader og kolonner går ikke opp med hverandre.

Merknad

Vær varsom! Multiplikasjonen gir kun mening om matrisene har riktig størrelser i forhold til hverandre.

$$[m\times \cancel{n}]\cdot[\cancel{n}\times p] = m\times p$$

Oppgave 8

La A, B og C være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix}5 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

Regn ut de ulike produktene om mulig.

Oppgave 9

Ta et løst Sudoku-brett og se på det som en 9×9-matrise A. Hva blir

$$A\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}?$$

Svar

I et sudoku-brett skal alle rader inneholde alle heltall fra 1 til 9 akkurat én gang. Du vil altså få summen

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 45$$

i hvert element av produktet. Sjekk om det stemmer med følgende sudoku-brett:

9	4	8	5	7	6	3	2	1
7	5	1	9	3	2	4	8	6
3	6	2	4	8	1	5	7	9
8	1	7	6	9	5	2	3	4
5	2	9	7	2	4	1	6	8
4	2	6	3	1	8	9	5	7
6	9	5	2	4	7	8	1	3
2	8	4	1	6	3	7	9	5
1	7	3	8	5	9	6	4	2