Lineær algebra og differensialligninger

Forkunnskaper

2023

Innholdsfortegnelse

1. Forkunnskaper

I dette kapittelet vil vi snakke litt løst og ledig om ting som burde være kjent. Derfor vil det i resten av notatene/kurset ikke brukes større tid på å forklare eller snakke om disse tingene. Du vil kanskje føle at det mangler detaljer i dette kapittelet, noe vi helt og holdent står inne for.

Der vi virkelig har hoppet over detaljer er i delkapittelet om integrasjon. Vi lister kun opp noen flotte egenskaper, men de burde da i gjengjeld være av allmenn interesse.

1.1. Funksjoner og mengder

Mengder

Intuitivt er en **mengde** en samling av ting. Tingene kaller vi for **elementer**. Det er gjort mye arbeid i å virkelig definere mengder av ulike matematikere opp gjennom, men vi forholder oss til denne intuitive forståelsen her. Har du mot all formodning et dypt ønske om å se hvorfor man kan bruke mye tid på dette, søk opp Russels paradoks.

La oss si at vi har en mengde kalt A, da kan vi matematisk skrive at x er et element i A som: $x \in A$. Skulle vi derimot si at x ikke er et element i A skriver vi $x \notin A$.

En mengde kan for eksempel være gitt ved de fire første naturlige tallene

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

de seks første primtallene

$$B = \{2, 3, 5, 6, 7, 11\}$$

eller mindre konkret; alle mennesker

$$\text{Mennesker} = \{\text{Alle mennesker}\}$$

Gitt en mengde M, kan vi se på **undermengder** av den. Det er mengder hvor alle elementer også er elementer av M. For eksempel vil $C = \{3, 4, 5\}$ være en undermengde av A, noe vi så skriver som $C \subseteq A$.

Vi kan også konstruere (under)mengder av andre mengder ved å beskrive egenskapene deres. For eksempel kan vi konstruere undermengden C som alle elementer i A som er ekte større enn 2 og mindre enn eller lik 5. En mer komprimert måte å skrive dette på er

$$C = \{x \in A \mid 2 < x \leq 5\}$$

Vi leser streken over som *slik at*. Observer at vi her først sa hvor vi tar elementer fra, $x \in A$, og så ga den beskrivende egenskapen deres, $2 < x \leq 5$. Hvis vi skulle beskrevet mengden av innbyggere i Norge kunne vi gjort det som

$$\{x \in \text{Mennesker} \mid x \text{ bor i Norge}\}$$

Mengdeoperasjoner

Gitt to eller flere mengder så kan vi lage nye mengder av dem på enkelte gitte måter:

- **Unionen** av A og B, skrevet som $A \cup B$, er mengden av elementer som er i A og/eller B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

- **Snittet** av A og B, skrevet som $A \cap B$, er mengden av elementer som er medlem av både A og B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$$

- **Differansen** av A og B, skrevet som $A \setminus B$ (enkelte ganger også som $A - B$), er mengden av elementer i A som ikke ligger i B.:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Hvis vi lar A og B være som over får vi

$$\begin{aligned}
A \cup B =& \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\} \\
A \cap B =& \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11\} = \{2, 3, 5\} \\
A \setminus B =& \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 3, 5, 7, 11\} = \{1, 4\}
\end{aligned}$$

Den **tomme mengden** er den unike mengden uten noen elementer. Vi gir den symbolet $\varnothing$. Den er alltid nyttig å ha, for eksempel hvis snittet av to mengder er ingenting:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{10, 11, 12\} = \varnothing$$

Oppgave 1

La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ og $C = \{1, 3, 5, 7\}$ og finn

a) $A \cap B$ b) $A \cup C$ c) $A \cap (B \cup C)$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ e) $(B \cup C) \setminus A$ f) $(A \setminus C) \cup B$

Tall

Mengdene som fanger vår interesse består veldig ofte av tall. Vi husker at ett reelt tall er et tall med potensielt uendelig mange desimaler. π er et veldig flott eksempel på ett reelt tall:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419 71\ldots$$

Mengden av alle reelle tall gir vi symbolet $\mathbb{R}$. Hvis vi skulle klare å skrive et tall som en brøk av heltall kaller vi det rasjonalt. Et eksempel på det er det noen kaller for ingeniør-pi:

$$\frac{22}{7} \approx 3.14286$$

Mengden av alle rasjonale tall gir vi symbolet $\mathbb{Q}$. Heltallene som er

$$\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

gir vi symbolet $\mathbb{Z}$, og til slutt gir vi mengden av naturlige tall symbolet $\mathbb{N}$. Hvorvidt 0 er ett naturlig tall er et spørsmål som kan skape diskusjon, men vi kan godt tillate oss å legge til 0 her og håpe ingen ser oss i kortene. Altså

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Nå kan du kanskje tenke at vi har glemt å nevne kjempene blant tallene, nemlig de komplekse. La oss for øyeblikket kun nevne at de er på formen $a+ib$ hvor i er et tall som oppfyller egenskapen $i^2 = -1$ og $a, b \in \mathbb{R}$. Mengden av alle komplekse tall gis symbolet $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Grunnleggende om funksjoner

Helt intuitivt er en **funksjon** f fra en mengde A til en mengde B kun en regel som assosierer et element i B til hvert element i A. Samme element i B kan assosieres til flere elementer i A, men ikke omvendt. Vi skriver $f\colon A \to B$ for å angi at f er en funksjon fra mengden A til mengden B.

Vi kaller A for **definisjonsmengden** (noen ganger også kalt domene) til funksjonen f, og noen ganger koster vi også på oss å kalle B for **kodomenet**. Hvis $a \in A$ så gir vi det assosierte elementet i B navnet $f(a)$.

Verdimengden (noen ganger også kalt bildet) til en funksjon $f\colon A \to B$ er undermengden av B som treffes av f, altså alle elementer i B som har fått et navn på formen $f(a)$. Med mengdenotasjon fra over ser dette ut som

$$V_f = \{b \in B \mid \exists\ a \in A \text{ slik at } f(a) = b\}$$

Symbolet $\exists$ leser vi som *det eksisterer*.

Eksempel 1.1.1

Her er et knippe funksjoner hvor definisjonsmengden og kodomenet kan være undermengder av $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$.

- Polynomfunksjoner, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
- Logaritmefunksjoner, f.eks. $\ln(x)$
- Exponentialfunksjoner, f.eks. $\exp(x) = e^x$, hvor $e \approx 2,71828$ er Eulers number
- Trigonometriske functioner, f.eks. $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- Produkter, summer og brøker av de nevnte funksjonene.

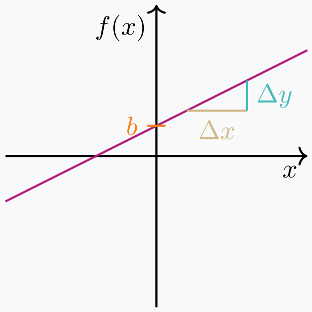
Oppgave 2

Hva er de største undermengdene av $\mathbb{R}$ som kan være definisjonsmengde og verdimengde av funksjonene over?

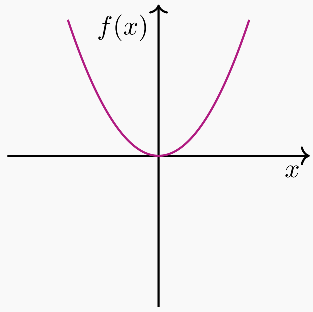
Graf av funksjoner

Når funksjonene vi jobber med har definisjonsmengde og verdimengde i $\mathbb{R}$ kan vi bli kjent med dem gjennom grafen deres. Grafen er mengden av punkter $(x, f(x))$ i koordinatplanet hvor x er i definisjonsmengden og $f(x)$ er det tilhørende tallet i verdimengden.

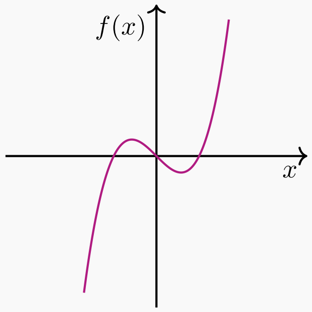
Eksempel 1.1.2 Grafer av ulike funksjoner



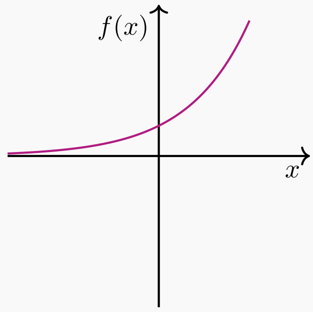
$f(x) = ax + b = \frac{\Delta y}{\Delta x}x + b$



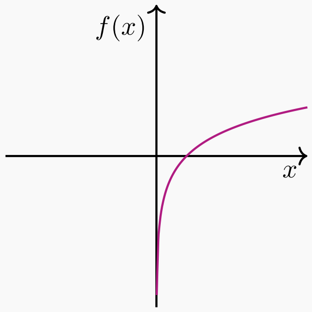
$f(x) = x^2$



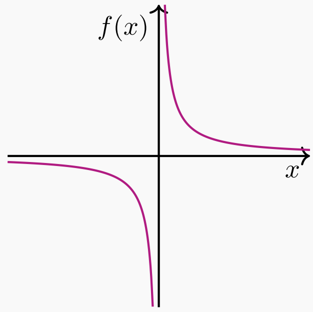
$f(x) = x^3 - x$



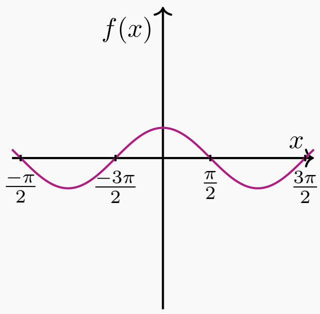
$f(x) = e^x$



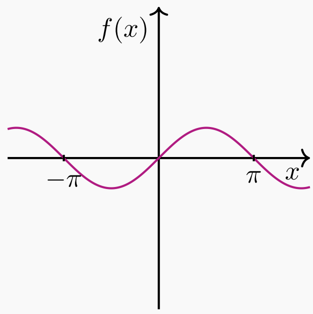
$f(x) = \ln(x)$



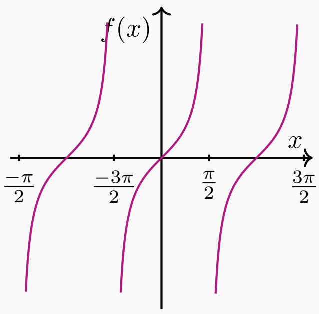
$f(x) = \frac{1}{x}$



$f(x) = \cos(x)$



$f(x) = \sin(x)$

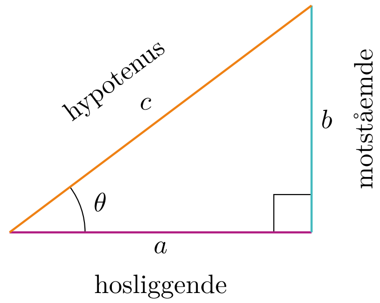


$f(x) = \tan(x)$

1.2. Trigonometri

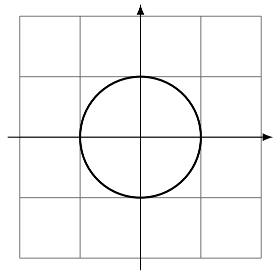
Definisjon og enhetssirkelen

Ditt første møte med sinus, cosinus og tangent av en vinkel θ var mest sannsynlig som ett forholdstall mellom ulike sider i en rettvinklet trekant, med θ som en intern vinkel.

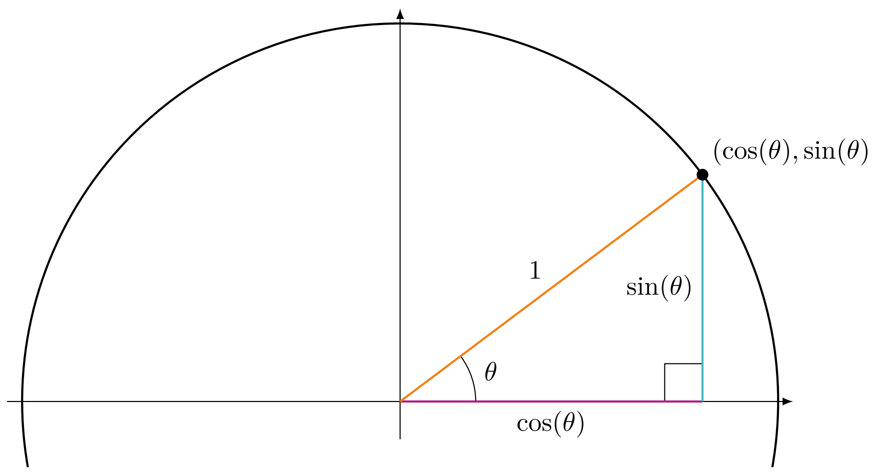


$$\sin(\theta) = \frac{b}{c} = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenus}}$$
$$\cos(\theta) = \frac{a}{c} = \frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenus}}$$
$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{\text{motstående}}{\text{hosliggende}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Dette er en veldig begrensende definisjon siden en generell vinkel kan være veldig stor, men i en trekant er en vinkel aldri større enn $90°$ eller $\frac{\pi}{2}$ radianer. Derfor søkte vi etter en utvidelse av definisjonen, og den fant vi ved hjelp av enhetssirkelen. Enhetssirkelen er en sirkel sentrert i origo med radius 1.



Tegner vi inn en rettvinklet trekant i denne sirkelen, kan vi se at toppunktet skjærer sirkelen i et punkt gitt ved cosinus og sinus av vinkelen til motstående hjørne:

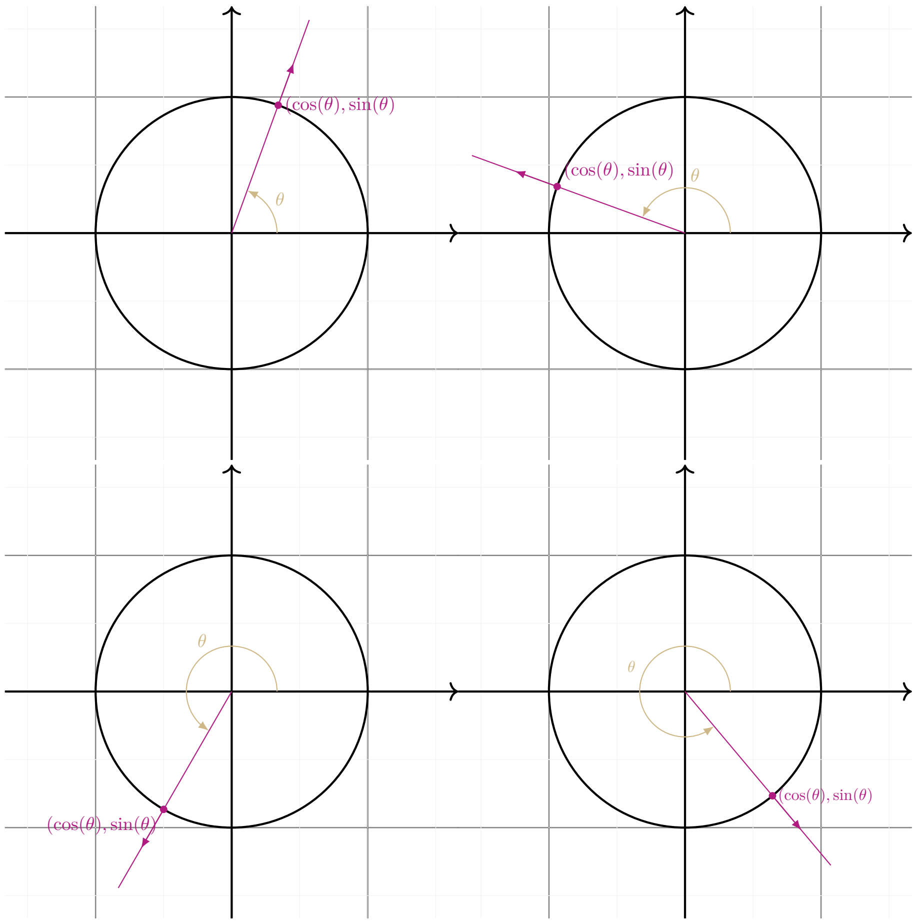


Vi definerer derfor sinus og cosinus på følgende vis. Merk at vi måler vinkler i en sirkel mot klokken. Konstruer en stråle fra origo slik at den har en vinkel θ med x-aksen. La (x, y) være skjæringspunktet mellom strålen og enhetssirkelen. Da lar vi

$$x = \cos(\theta) \quad \text{og} \quad y = \sin(\theta).$$

Fra dette kan vi så definere tangens som

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \text{når } \cos(\theta) \neq 0, \text{ altså } \theta \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$



Trigonometriske identiteter

Vi får umiddelbart det følgende resultatet fra definisjonen av sinus og cosinus. **Merk!** Vinklene er nå oppgitt som radianer.

Resultat 1.2.1

The following equalities hold for any $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
2. $\cos(-x) = \cos(x + \pi) = \cos(x)$
3. $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$
4. $\sin(-x) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$
5. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

Andre hendige resultater er

Resultat 1.2.2

1. $\sin(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$
2. $\cos(\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$
3. $\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \sin(\theta)\sin(\phi)$
4. $\sin(\theta \pm \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) \pm \cos(\theta)\sin(\phi)$

Omskriv $a\cos(ct) + b\sin(ct)$

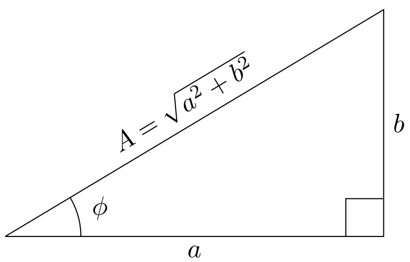
Når vi har en sum av en sinus- og cosinusfunksjon hender det at vi helst skulle skrevet det som enten en sinus-funksjon eller en cosinus-funksjon. La oss dermed se på en metode for å skrive om summen

$$a\cos(ct) + b\sin(ct)$$

som

$$A\cos(ct + \phi)$$

Hvis vi har en rettvinklet trekant med kateter av lengde a og b



så har hypotenusen lengde $\sqrt{a^2 + b^2} = A$, og vinkelen mellom hypotenusen og kateten av lengde a er gitt ved $\phi = \arctan\frac{b}{a}$. Fra definisjonen av cosinus og sinus har vi

$$a = A\cos(\phi) \quad \text{and} \quad b = A\sin(\phi).$$

Hvis vi nå bruker identiteten $\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v)$ kan vi observere at

$$a\cos(ct) + b\sin(ct) = A\cos(\phi)\cos(ct) + A\sin(\phi)\sin(ct) = A\cos(ct - \phi)$$

Generelt kan vi nok ikke forvente at a og b er positive tall, så det generelle argumentet skulle nok vært gjort på enhetssirklen. Konsekvensen av en mer generell fremgangsmåte er at vi muligens må legge til π til $\arctan(\frac{b}{a})$ for å få ϕ. Sagt mer korrekt; hvis $\arctan(\frac{b}{a})$ ikke ligger i samme kvadrant som (a, b), så må vi legge til π.

Resultat 1.2.3

Oppsummert

$$a\cos(ct) + b\sin(ct) = A\cos(ct - \phi)$$

hvor $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ og

$$\phi = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{hvis } a > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{hvis } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{hvis } a = 0 \text{ og } b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{hvis } a = 0 \text{ og } b < 0 \end{cases}.$$

1.3. Derivasjon

Definisjon

Den **deriverte** av en funksjon f er en annen funksjon f' gitt ved

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

for alle x hvor denne grensen eksisterer. Hvis $f'(x)$ eksisterer sier vi at f er **deriverbar** i x.

Ett grunnleggende faktum er at hvis en funksjon f er deriverbar i x, så er den også kontinuerlig der. Det motsatte er dessverre ikke nødvendigvis sant. Vi kan finne funksjoner som er kontinuerlig for alle x, men ikke deriverbar noen steder.

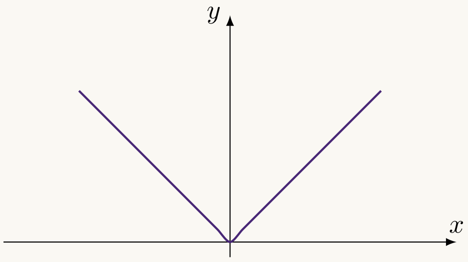
Tangentlinjen til en funksjon f i et punkt $(x, f(x)$ er gitt ved

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

hvis $f'(x_0)$ eksisterer.

Oppgave 3

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = |x|$. Denne funksjonen er kontinuerlig for alle x. Bestem for hvilke x den også er deriverbar.



Vi har ulike notasjoner vi bruker for den deriverte av en funksjon:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \dot{f}(x)$$

Den siste er som regel forbeholdt når variabelen er tid t.

Resultat 1.3.4

Den deriverte av enkelte funksjoner

1. $\frac{d}{dx} C = 0$
2. $\frac{d}{dx} x = 1$
3. $\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}$
4. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
5. $\frac{d}{dx} e^{rx} = re^x$
6. $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
7. $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
8. $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

Har vi funksjoner som ser noe mer avanserte ut så har vi noen regler som kan hjelpe oss med å finne den deriverte ved hjelp av enklere delfunksjoner.

Resultat 1.3.5 Sum, differanse og konstante multipler

La f og g være deriverbare funksjoner i x og la C være en konstant, da er funksjonene $f \pm g$ og Cf også deriverbare i x. Videre har vi følgende likheter

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(Cf)'(x) = Cf'(x)$

Resultat 1.3.6 Produktregel

La f og g være deriverbare funksjoner i x, da er produktet fg også deriverbar i x. Den deriverte er gitt ved

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Resultat 1.3.7 Kvotientregel

La f og g være deriverbare funksjoner i x og $g(x) \neq 0$. Kvotientfunksjonen f/g er da også deriverbar i x og

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Resultat 1.3.8 Kjerneregel

La f være en deriverbar funksjon i $u = g(x)$ og g en deriverbar funksjon i x. Komposisjonsfunksjonen $f \circ g(x) = f(g(x))$ er da også deriverbar i x, og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Når du bruker kjerneregelen kan det være lurt å først bruke substitusjonen $u = g(x)$ når du finner $f'(g(x))$ før du så substituerer tilbake.

Taylorpolynom

Resultat 1.3.9

La f være en funksjon hvor de $n+1$ første deriverte eksisterer i ett interval rundt a og x, da har vi for en s mellom a og x følgende

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n-1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Resultat 1.3.10

Når $x \to 0$:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
2. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

3. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

1.4. Antiderivert og integrasjon

Resultat 1.4.11

1. $\displaystyle\int 1dx = x + C$
2. $\displaystyle\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$
3. $\displaystyle\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$
4. $\displaystyle\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \ (r \neq -1)$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
6. $\displaystyle\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$
7. $\displaystyle\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$
8. $\displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

Resultat 1.4.12

$$\int (Af(x) + Bg(x))dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx$$

Resultat 1.4.13 Substitusjon

La g være en deriverbar funksjon på $[a, b]$, la $g(a) = A$ og $g(b) = B$. La også f være en kontinuerlig funksjon på verdimengden til g. Da har vi

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_A^B f(u)du$$

Resultat 1.4.14 Delvis integrasjon

La u og v være deriverbare funksjoner. Da har vi

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

1.5. Løse likningssystemer med to ukjente

Paulus skrev til korinterne en gang i tiden at størst av alt er kjærligheten. I matematikken vil jeg påstå at størst av alt er likningen. Uansett hvor du forviller deg i matematikk så vil du støte på likninger, og om du prøver å unngå dem vil du aldri komme frem dit du vil. Derfor må vi utvikle strategier for å løse dem.

La oss ta for oss den type likning vi har døpt **lineære** siden de er enklest, samt at med en rekke (mer eller mindre innafor) forenklinger kan vi alltids redusere styggere likninger til disse. En generell lineær likning har følgende form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

hvor $a_1, \ldots, a_n, b$ er kjente verdier og $x_1, \ldots, x_n$ er verdier vi ønsker å finne, også kalt **ukjente**. Denne er ikke vanskelig i seg selv, for hvis vi bare kaster en terning for verdien på de første $n-1$ x-verdiene kan vi alltid kompensere for dem med å velge en fin verdi for x_n;

$$x_n = \frac{1}{a_n}(b - a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_{n-1}x_{n-1})$$

Problemet dukker opp når vi får flere lineære likninger som alle skal løses likt. Da kan vi fort ende opp med stor frihet (uendelig mange løsninger), ingen frihet (en entydig løsning) eller faktisk ingen løsning overhodet.

Her skal vi se på en smart strategi for å samtidig løse to likninger med to ukjente;

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Den kan generaliseres til systemer av flere likninger og med flere ukjente, men det gjør vi ikke her.

Vi kaller metoden vår for addisjonsmetoden, og ignorerer glatt innsettingsmetoden. Anta at a og c er ulik 0. Nå er målet å addere en multippel av første ligning til andre ligning for at leddet med x eller leddet med y skal falle vekk.

Eksempel 1.5.1

Finn linjen $y = ax + b$ som skjærer punktene $(2, 5/2)$ og $(5, 8/2)$.

Vi ser at a og b må tilfredstille følgende to likninger for at linjen skal skjære punktene.

$$\begin{cases} 2a + b = \frac{5}{2} \\ 5a + b = \frac{8}{2} \end{cases}$$

Legger vi til -1 av første likning til den andre likningen får vi

$$\begin{cases} 2a + b = \frac{5}{2} \\ 3a \quad\;\; = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Nå kan vi dele andre likning på 3 og få

$$\begin{cases} 2a + b = \frac{5}{2} \\ \;\; a \quad\;\; = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Legger vi til -2 av andre likning til første ligning står vi igjen med

$$\begin{cases} \quad\;\; b = \frac{3}{2} \\ a \quad\;\; = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nå leser vi ut at linjen vår er gitt ved

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Grunntanken bak denne løsningsstrategien ligger i følgende observasjon:

Resultat 1.5.15

Hvis vi har ett likningssystem (samling av lineære likninger) så vil følgende tre operasjoner ikke forandre løsningene til systemet:

- Bytte om på rekkefølgen til likningene
- Multiplisere en likning med ett tall
- Legge til ett multippel av en likning til en annen

Når vi tenker oss om så er det ikke så interessant å skrive opp de ukjente hver gang vi skriver opp igjen likningene etter å ha gjort en operasjon. Vi kan skrive opp koeffisientene våre og konstantene i en utvidet matrise, og heller jobbe med den.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right]$$

Eksempel 1.5.2

La oss løse likngingene fra over igjen, bare med matriser. Systemet kan skrives som matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ 5 & 1 & \frac{8}{2} \end{array}\right]$$

Og vi løser:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ 5 & 1 & \frac{8}{2} \end{array}\right] &\xrightarrow{II-I} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ 3 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{II\cdot\frac{1}{3}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{I-2II} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Eksempel 1.5.3

La oss forsøksvis løse følgende system

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -5x + 10y = -1 \end{cases}$$

Vi jobber med den utvidede matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 10 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Den siste matrisen tilsvarer

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$$

Likningen $0x + 0y = 4$ er lik $0 = 4$, som ikke kan stemme, så likningssystemet har ingen løsninger.

Eksempel 1.5.4

La oss løse følgende system

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$$

Vi jobber med den utvidede matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

og får systemet

$$\begin{cases} x + 2y \quad = 3 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Vi står igjen med likningen $x+2y = 3$ som er en linje. Altså har vi uendelig mange løsninger.

1.6. Komplekse tall

Når du løser likninger på formen
$$ax^2 + bx + c = 0$$
lærte du på ett tidspunkt **abc-formelen**:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
Videre lærte du muligens også at når diskriminanten $b^2 - 4ac$ er negativ så har du ingen løsninger. Dette var på grunn av at det ikke er noen reelle tall d slik at d^2 er negativ. For å fikse dette irritasjonsmomentet, utvidet vi mengden tall med et imaginært tall i som hadde egenskapen $i^2 = -1$.

Dermed fikk vi nå muligheten til å løse for x i likningen $x = \sqrt{y}$ selv om y er ett negativt reelt tall. Når x er negativ, har vi $x = -|x|$ og $\sqrt{x} = \sqrt{-1 \cdot |x|} = i\sqrt{|x|}$. Går vi nå tilbake til abc-formelen kan vi nå se at hvis $b^2 - 4ac < 0$ får vi likevel løsninger:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eksempel 1.6.1

Vi vil finne røttene til polynomet
$$x^2 - 2x + 2$$
Bruker vi abc-formelen får vi
$$\begin{aligned} x =& \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2}}{2} \\ =& \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \\ =& \frac{2}{2} \pm \frac{i\sqrt{4}}{2} \\ =& \frac{2 \pm 2i}{2} \\ =& 1 \pm i \end{aligned}$$
Vi får altså to komplekse røtter, $1 + i$ og $1 - i$. Det er absolutt ingen tilfeldighet at disse røttene er så like.

Mengden av alle tall på formen $z = a + ib$ hvor både a og b er reelle kaller vi for **komplekse tall** og den er gitt symbolet $\mathbb{C}$. Merk deg spesielt at siden $b = 0$ er ett reelt tall så kan alle reelle tall $a \in \mathbb{R}$ skrives som et komplekst tall:
$$a = a + i0 \in \mathbb{C}$$
Altså er mengden av reelle tall en undermengde av de komplekse. La oss umiddelbart introdusere noen merkelapper for komplekse tall; hvis $z = a + ib \in \mathbb{C}$ er et komlekst tall kaller vi $\mathrm{Re}(z) = a$ den **reelle delen** av z, og $\mathrm{Im}(z) = b$ den **imaginare delen** av z.

Enda ett nyttig begrep i verktøykassen vår er **kompleks konjugert**: Hvis $z = a + ib$ er et komplekst tall, så er tallet $\overline{z} = a - ib$ den kompleks konjugerte av z.

Register