1. Vektorer og matriser

1.1. Invers og determinant

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finn produktene AI og IA.

Svar

Vi vil få $AI = A = IA$. La oss skrive opp kun ene multiplikasjonen. Vi regner ut AI

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 4 & 5 & 7 \end{array}$$

Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Regn ut både AB og BA.

Svar

Vi vil få $AB = I = BA$. Vi tar for oss produktet AB:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -3 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & -2 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & a & b & c \\ 3 & 4 & 5 & d & e & f \\ 4 & 5 & 7 & g & h & i \end{array}$$

$$\begin{aligned}
a =& -3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 1 \\
b =& 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 = 0 \\
c =& 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 0 \\
& d = -3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 0 \\
e =& 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 = 1 \\
f =& 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 0 \\
g =& -3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 = 0 \\
h =& 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + (-2) \cdot 7 = 0 \\
i =& 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 7 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -3 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & -2 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Oppgave 3

Regn ut produktet

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

og sammenlign med svaret du fikk når du løste likningssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 4x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

i begynnelsen av dagens notat.

Svar

Produktet er

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Det er ganske naturlig at det gir oss samme svaret. For hvis vi ser nærmere på matriselikningen ser vi at hvis vi ganger med B fra venstre begge sider får vi

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Definisjon

La A være en kvadratisk $n \times n$-matrise. Hvis det eksisterer en $n \times n$ matrise B slik at $AB = I$ og $BA = I$, kaller vi B **inversmatrisen** til A og skriver A^{-1} i stedet for B.

En inversmatrise (hvis den eksisterer) er unik.

I datamaskinens tid er det unødvendig å terpe på hvordan vi finner inversmatriser (hvis de eksisterer) til matriser større enn 2×2. Vi er mer interessert i å avgjøre om en matrise er inverterbar og hvis den er 2×2 så er det en fin formel vi lett kan lære oss.

Resultat 1.1.1

Inversmatrise for 2×2-matriser La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Hvis $ad - bc \neq 0$ så eksisterer A^{-1} og har formen

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Tallet vi får under brøken, $ad - bc$, kaller vi for **determinanten** til matrisen A. Vi kan definere determinanter for vilkårlig store kvadratiske matriser, og de vil alltid fortelle oss om matrisen er inverterbar eller ikke.

Her ser vi oss fornøyd med å repetere hvordan vi finner determinanten for 3×3- og 2×2-matriser.

Definisjon

La A være en 3×3-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Determinanten til A er gitt ved

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Vi har regnemetoder som gjør det enklere å huske den store summen.

Vi kan for eksempel regne ut determinanten som en vektet sum av determinanten til delmatriser. Vi har altså

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Vi kan se at vi har gått langs første rad og fått ett ledd i summen for hvert element. Leddene har vi funnet ved at for hvert element i raden konstruert 2×2-matrisen vi får ved å slette raden og kolonnen til elementet, og ganget elementet med dens determinant.

Mer eksplisitt, for første ledd har vi sett på elementet a_{11},

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

slettet raden og kolonnen det opptrer i for å finne

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Så tatt produktet av determinanten dens og a_{11}. For det andre leddet har vi gått til radens andre element, a_{12},

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

slettet raden og kolonnen den opptrer i for å få

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

og tatt produktet av dens determinant og a_{12}. Til slutt for det siste leddet, har vi gått til radens tredje element

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

og slettet kolonnen og raden den opptrer i. Vi har så tatt produktet av a_{13} og determinanten til den resulterende matrisen

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Leddene i summen har fått fortegn basert på et sjakkmønster. Se på matrisen av fortegn her

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Vi følger fortegne gitt i første rad.

Det kan vises at vi kan gjøre tilsvarende operasjoner som over i vilkårlige rader av matrisen, så lenge leddene følger fortegnsskjemaet angitt av sjakkmønsteret. Altså kunne vi regnet determinanten som

$$\det A = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

hvor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow a_{21}\cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow a_{22}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow a_{23}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

eller som

$$\det A = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

hvor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow a_{31}\cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow a_{32}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow a_{33}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Determinantens egenskaper

Noen ganger vil det muligens være hensiktsmessig å gjøre radoperasjoner på en matrise før du regner ut determinanten. Determinanten til matrisen etter en radoperasjon vil enten være lik eller være skalert av determinanten til originalmatrisen.

- Hvis du ganger en rad i A med en konstant k for å få matrisen B, vil $\det(B) = k \cdot \det(A)$,
- Hvis du bytter om på to rader i A for å få B, vil $\det(A) = -\det(B)$,
- Hvis du legger til en skalert rad i A til en annen for å få B, vil $\det(A) = \det(B)$.

I tillegg vil $\det(A) = \det(A^T)$. Og det kan vises at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
Til slutt kan vi skrive opp resultatet som gjør determinanten så interessant:

Resultat 1.1.2

La A være en kvadratisk matrise. Determinanten til A er ulik 0 hvis og bare hvis A er inverterbar.

Faktisk relaterer begge disse spørsmålene tilbake til spørsmålet om lineær uavhengighet.

Resultat 1.1.3

La A være en kvadratisk matrise. Kolonnene i A er lineært uavhengige, hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$, hvis og bare hvis, A er inverterbar.

Til slutt kan vi observere at hvis A er en inverterbar $n \times n$-matrise, så vil vi kunne finne en entydig løsning for likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

for alle vektorer $\mathbf{b}$. Nemlig $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Vi oppsummerer:

Resultat 1.1.4

La A være en $n \times n$-matrise. Følgende er ekvivalente utsagn.

- A er inverterbar
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
- Kolonnene i A er lineært uavhengige
- $\det(A) \neq 0$