Lineær algebra og differensialligninger

2023

Innholdsfortegnelse

1. System av differensialligninger

1.1. Vektorfunksjoner

Det vi har sett på i går og skal se videre på i dag er vektorer hvor elementene er kontinuerlige og deriverbare funksjoner. Vi omtaler gjerne dem som vektorfunksjoner, og ser på det som funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$;

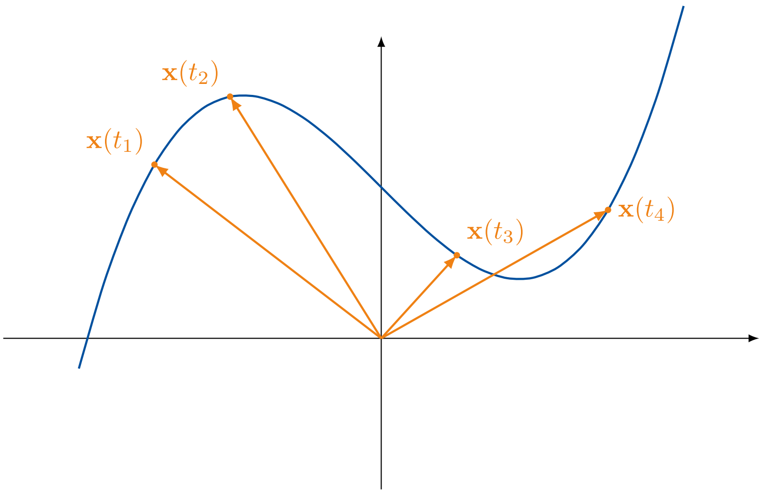
$$\mathbf{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Her er hver $x_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en deriverbar og kontinerlig funksjon.

Disse vektorfunksjoner kan vi også forstå som parametriserte kurver, og når vi jobber i to dimensjoner kan vi tegne disse kurvene grafisk. Hvis vi har vektorfunksjonen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

får vi for hver verdi av t, en vektor i planet som peker ut fra origo til punktet $(x_1(t), x_2(t))$. Nå kan vi igjen godt tenke at punkter er det samme som vektorer. Plotter vi disse punktene for alle verdier av t, så vil det åpenbare seg en kurve:



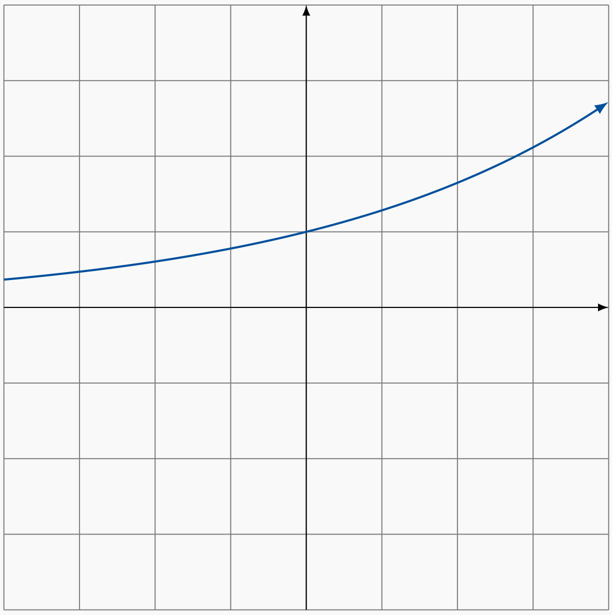
La oss gjøre prøve å bygge litt intuisjon. Vi starter med det kjente og kjære.

Eksempel 1.1.1

Hvis

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ e^{0.25t} \end{bmatrix}$$

så får vi ett plott av $e^{0.25t}$:



Merknad

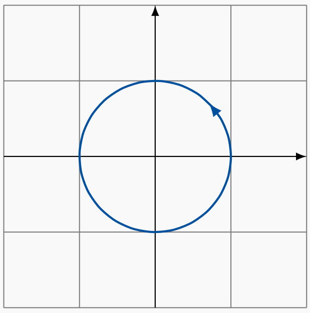
Legg merke til at vi legger på ett pilhode for å vise hvor vi går langs kurven ved økende tid.

Eksempel 1.1.2 Kurver

a) Hvis

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

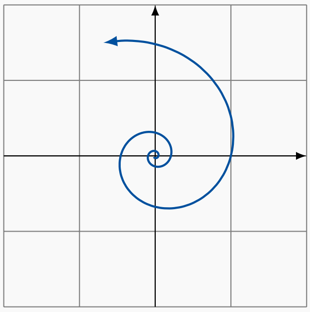
så blir kurven en sirkel i planet med en orientering mot klokken:



b) Hvis

$$\mathbf{y}(t) = e^{0.25t} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

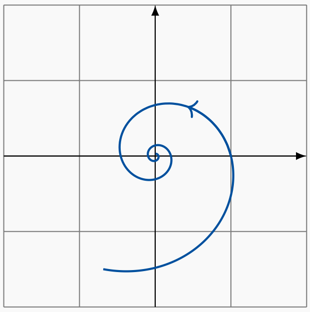
så får vi en spiral ut fra origo med orientering mot klokken:



c) Hvis

$$\mathbf{y}(t) = e^{-0.25t} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

så får vi en spiral inn mot origo med orientering mot klokken:

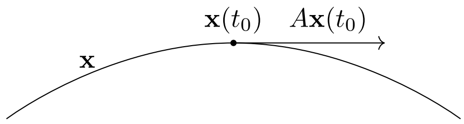


1.2. Fasediagram

La oss nå se på et system av differensialligninger,

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Den forteller oss at hvis vi har en løsning $\mathbf{x}(t)$, så må den deriverte til kurven i tidspunktet t_0, være gitt som $\mathbf{x}'(t_0) = A\mathbf{x}(t_0)$.



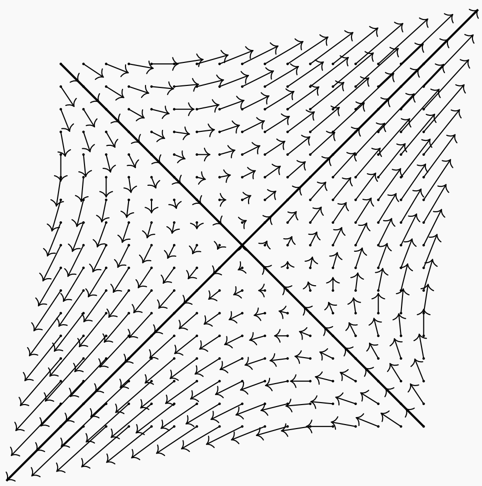
Vektoren $A\mathbf{x}(t_0)$ er den deriverte av $\mathbf{x}$ i $t = t_0$

Vi kan nå for hvert punkt i planet (y_1, y_2) assosiere en vektor $A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, med startpunkt i (y_1, y_2). Denne samlingen vektorer kaller vi vektorfeltet til A. Fra det vi beskrev over ser vi at disse vektorene vil tangere løsningskurvene av $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Eksempel 1.2.3

La oss skissere vektorfeltet til systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$



Aksene er linjene utspent av egenvektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som tilhørere egenverdiene 3 og -1. Vi kan legge merke til at pilene går mot uendelig langs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ som har en positiv egenverdi, og mot origo langs $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ som står til en negativ egenverdi.

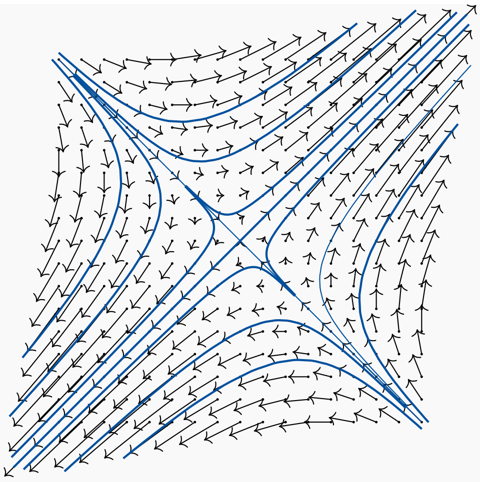
Fasediagrammet til $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ er en skisse av alle mulige løsninger, inkludert orientering. En slik skisse kan vi konstruere ved å først skissere vektorfeltet til A og deretter tegne kurver langs pilene.

Eksempel 1.2.4

Vi skisserer fasediagrammet til systemet med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tegn inn kurver som tangerer vektorene i vektorfeltet.



Løsningene beveger seg mot origo langs span $\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$, før den bøyer av vekk fra origo langs span $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$.

La oss nå se litt på hvordan fasediagrammene ser ut for ulike løsninger. Det er to hovedtilfeller vi snevrer oss inn til, nemlig A har to reelle egenverdier og A har to komplekse egenverdier.

To reelle egenverdier

I går så vi at initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

har løsningen

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0.$$

La oss nå gå tilbake til denne. Hvis A har to reelle egenverdier, λ_1, λ_2, så fant vi e^{At} som

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}^{-1}.$$

Her er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lineært uavhengige egenvektorer tilhørende henholdsvis egenverdiene λ_1 og λ_2. Nå kan vi observere at hvis vi tar matriseproduktet $P^{-1}\mathbf{x}_0$ og kaller den for $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$, ser vi at

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= Pe^{Dt}P^{-1}\mathbf{x}_0\\ &= Pe^{Dt}\mathbf{c}\\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\\ &= c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Altså får vi at

Resultat 1.2.1

La A være en reell 2×2-matrise med reelle egenverdier λ_1 og λ_2. Hvis $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektor tilhørende egenverdiene, er den generelle løsningen på systemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2.$$

Eksempel 1.2.5

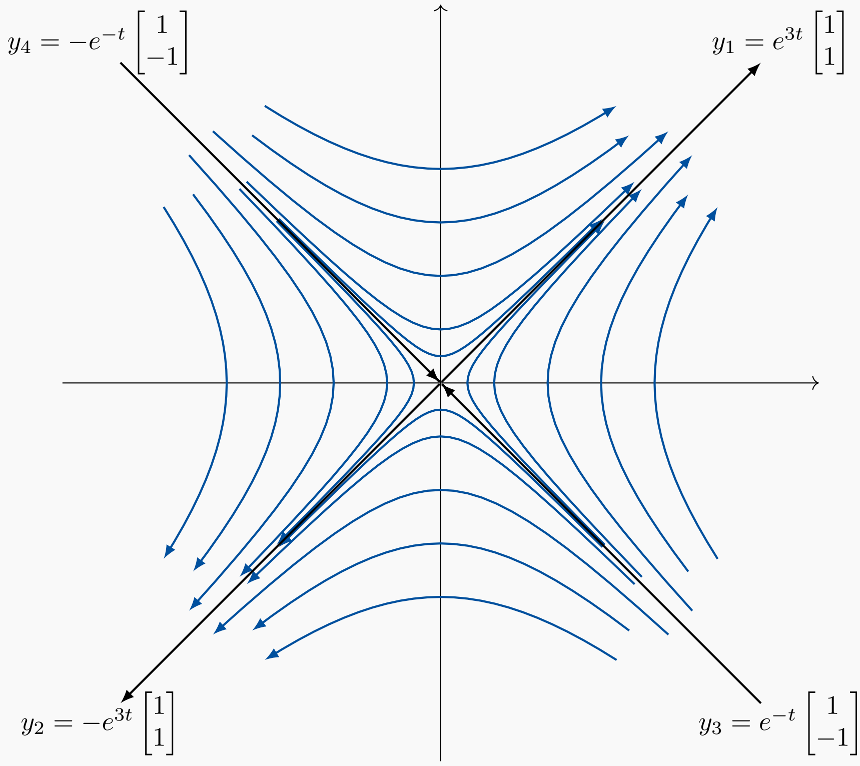
Vi ser nok en gang på systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

som har generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ved å velge ulike verdier for c_1 og c_2 har vi fått ulike løsningskurver for systemet.



Vi kan spesielt merke oss at vi har løsninger langs linjene utspent av egenvektorene:

$$y_1(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y_2(t) = -e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y_3(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$y_4(t) = -e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

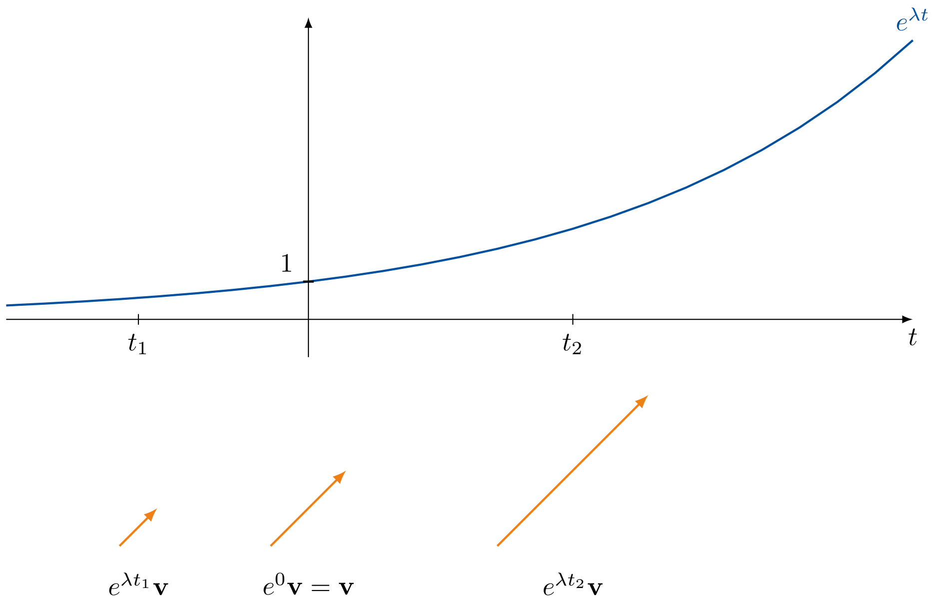
La oss nå forsøksvis forstå hvordan egenverdiene påvirker løsningskurvene. I den generelle løsningen

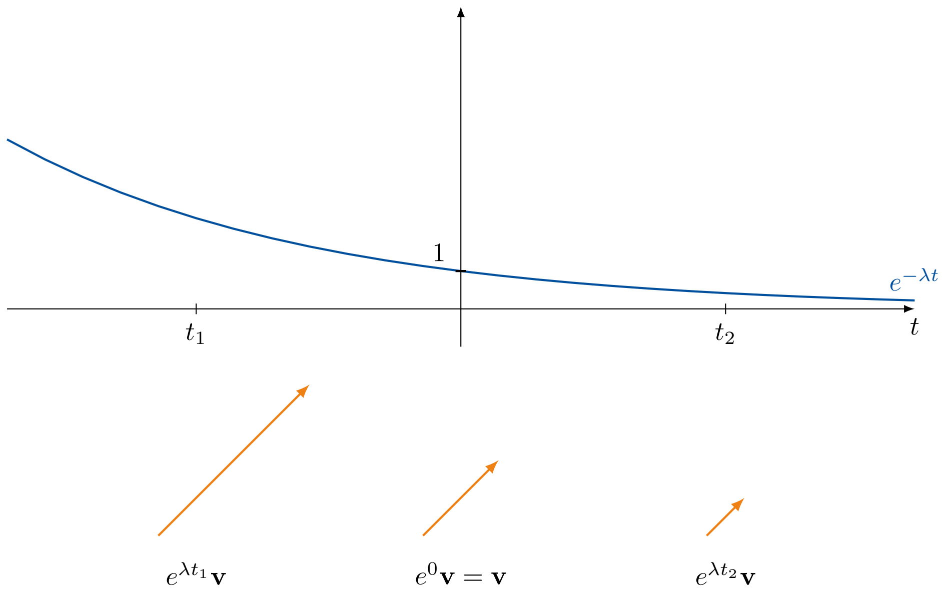
$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

er det eneste som forandrer seg med tiden det vi skalerer vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ med. For å forstå løsningskurven må vi dermed forstå eksponentialfunksjonen. Vi gjør det ved å fylle inn følgende tabell.

λ	$e^{\lambda t}$	$e^{\lambda t}\mathbf{v}$
> 0	øker	går vekk fra origo
$= 0$	konstant	står i ro
< 0	minker	går mot origo

Tabell 1.1: Hva skjer når t vokser?





Merknad

Merk deg at $\lambda < 0$ dominerer når $t \ll 0$, og $\lambda > 0$ dominerer når $t \gg 0$.

Her er en fremgangsmåte for å skissere fasediagrammet til $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ når A har to reelle egenverdier.

a) Tegn to lineært uavhengige egenvektorer i et koordinatsystem.

b) Avgjør bevegelsen til løsningene langs utspennet til hver egenvektor.

c) Tegn kurver som beveger seg i henhold til dette.

Oppgave 1

Skisser fasediagrammet til systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, egenverdier: $1, -1$, egenvektorer: $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, egenverdier: $6, 4$, egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Utforsk gjerne fasediagrammene i Geogebra-dokumentet under diskusjonen.

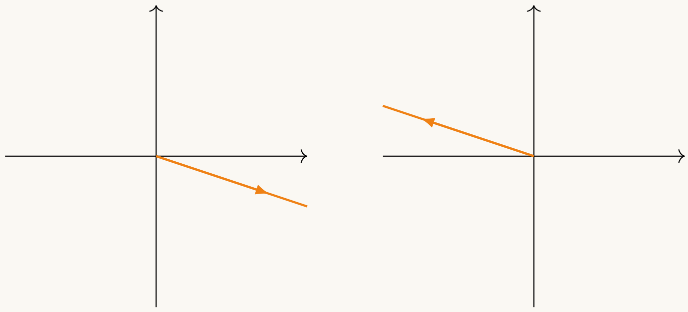
Svar

a)

Vi vet at den generelle løsningen på dette systemet er gitt ved

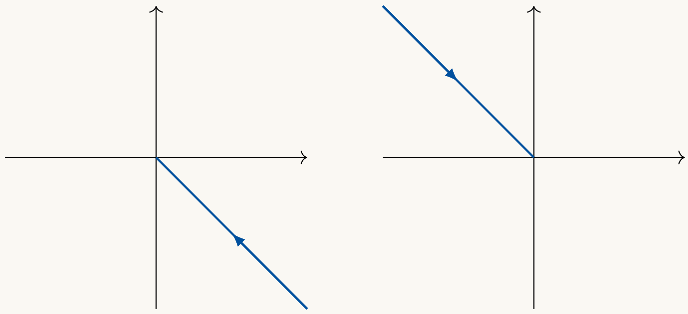
$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hvis $c_2 = 0$ og $c_1 > 0$ får vi at løsningskurven vil være ett rett linjestykke i retning ut fra origo mot høyre, langs linjen utspent av $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Tilsvarende for $c_1 < 0$ og $c_2 = 0$ får vi en løsningskurve ut fra origo mot venstre, langs linjen utspent av $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.



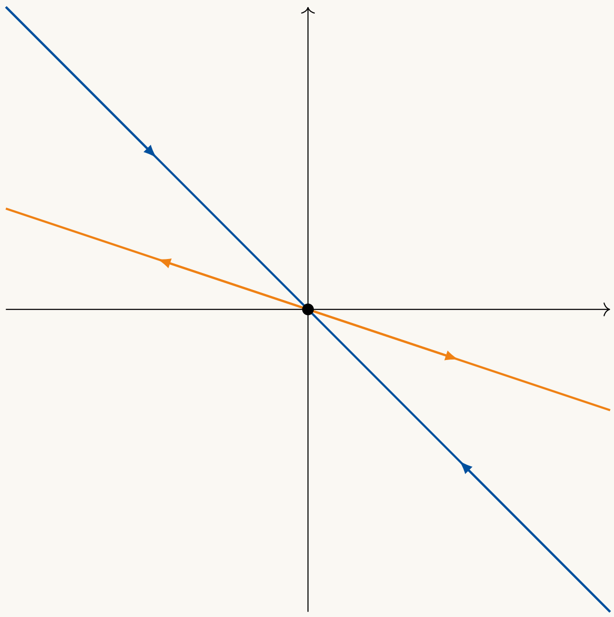
$c_1 > 0,\ c_2 = 0$ $\qquad$ $c_1 < 0,\ c_2 = 0$

Hvis $c_1 = 0$ og $c_2 > 0$ vil løsningskurven være ett linjesegment med retning inn mot origo fra venstre, langs linjen utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, og for $c_1 = 0$ og $c_2 < 0$ vil løsningskurven være ett linjesegment med retning inn mot origo fra høyre, langs linjen utspent av $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



$c_1 = 0,\ c_2 > 0$ $\qquad$ $c_1 = 0,\ c_2 < 0$

Legger vi alle disse fire løsningskurvene inn i samme graf får vi da:



For en generell løsningskurve med $c_1 \neq 0$ og $c_2 \neq 0$ så må vi se på hvilket ledd i

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

som dominerer for ulike verdier av t. For $t \ll 0$ så vet vi at $e^t \approx 0$, og dermed

$$\mathbf{x}(t) \approx c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Altså vil enhver løsningskurve gå parallelt med den blå løsningskurven i begynnelsen. For $t \gg 0$ vet vi at $e^{-t} \approx 0$, og dermed

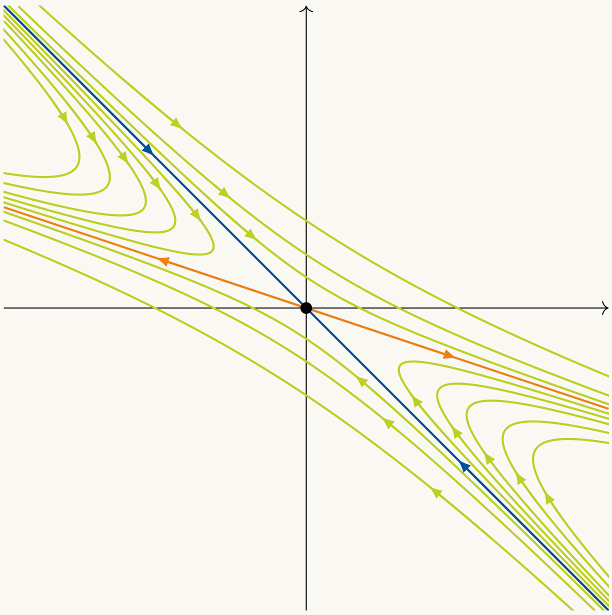
$$\mathbf{x}(t) \approx c_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Altså vil enhver løsningskurve gå parallelt med oransje løsningskurven etterhvert. På et tidspunkt så vil

$$c_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

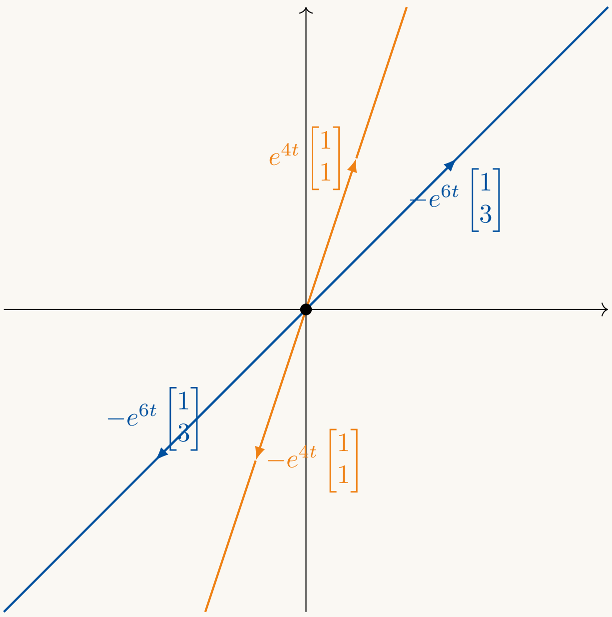
bidra like mye, og det vil være når kurven er nærmest origo. Vi kan tenke på dette som at løsningskurven har to asymptoter, en når $t \to -\infty$ og en når $t \to \infty$. Hvis vi tegner opp noen av disse kurvene mellom to av egenvektoraksene vil vi nå få noe slik:

Vi tegner så inn i de andre aksene og får



b)

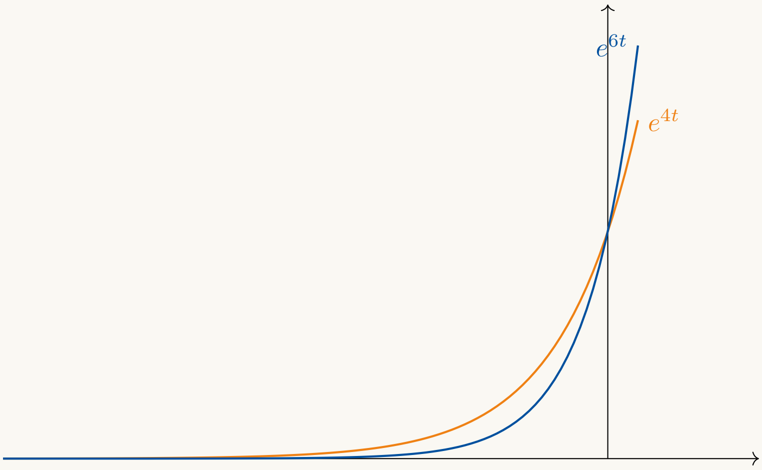
Begynnelsen her er ganske lik som i **a)**, så vi kan hoppe rett til at vi har tegnet opp aksene til egenvektorene.



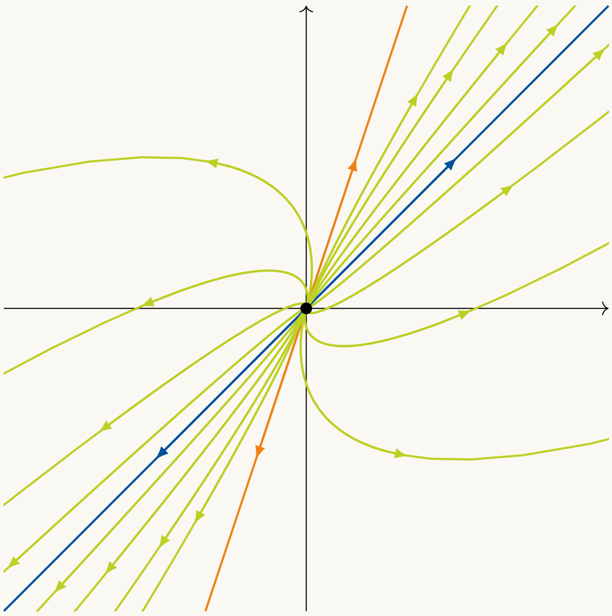
Når vi nå skal se på en generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

så blir det litt annerledes enn for forrige tilfelle, siden egenverdiene har samme fortegn. Vi skisserer grafene for e^{4t} og e^{6t} for å hjelpe oss med tolkningen:



Vi ser at både e^{4t} og e^{6t} går mot 0 når $t \to -\infty$, så enhver løsningskurve vil begynne i origo. Videre ser vi at i begynnelsen så vil e^{4t} være større enn e^{6t}, så ut fra origo vil løsningskurvene ligge parallelt med linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Deretter ser vi at e^{6t} skyter voldsomt fart, og dominerer raskt i størrelse, dermed vil løsningskurvene legge seg parallelt med linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. Hvis vi tegner opp ett knippe løsningskurver, så ser vi hvordan det blir



1.3. To komplekse egenverdier

I det komplekse tilfellet har vi en løsning på formen

$$\mathbf{x}(t) = e^{at}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{v}) & \mathrm{Im}(\mathbf{v})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(bt) & -\sin(bt)\\ \sin(bt) & \cos(bt)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{v}) & \mathrm{Im}(\mathbf{v})\end{bmatrix}^{-1}\mathbf{x}_0$$

hvor $\mathbf{v}$ er en egenvektor til egenverdien $\lambda = a - ib$. Vi kan bruke samme variabel som i forrige seksjon til å utlede følgende generelle løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1e^{at}[\mathrm{Re}(\mathbf{v})\cos(bt) - \mathrm{Im}(\mathbf{v})\sin(bt)] + c_2e^{at}[\mathrm{Re}(\mathbf{v})\sin(bt) + \mathrm{Im}(\mathbf{v})\cos(bt)],$$

men vi ser heller på

$$\mathbf{x}(t) = e^{at}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{v}) & \mathrm{Im}(\mathbf{v})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(bt) & -\sin(bt)\\ \sin(bt) & \cos(bt)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$$

Her kan vi spesielt se på leddet

$$\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{v}) & \mathrm{Im}(\mathbf{v})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(bt) & -\sin(bt)\\ \sin(bt) & \cos(bt)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$$

som vil bidra til en sirkulære eller elliptisk grunnbevegelse til løsningskurven. Leddet e^{at} bidrar til enten en økende, minkende eller konstant avstand fra origo.

Eksempel 1.3.6

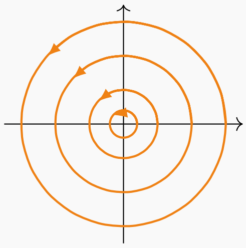
Vi ser igjen på systemet gitt ved

$$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

denne hadde generell løsning

$$\begin{aligned} & c_1\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}\\ = & \begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Fasediagrammet består av sirkler sentrert i origo med retning mot klokken.



Eksempel 1.3.7

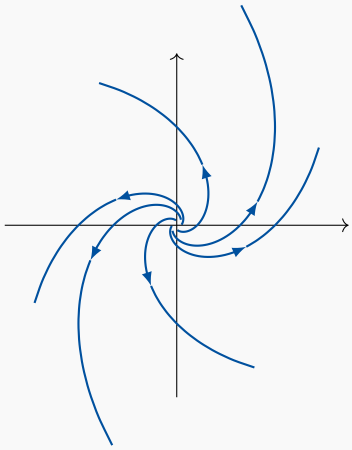
La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

være enda ett blaff fra i går. Denne hadde løsning

$$e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Faktoren e^t gir oss en bevegelse utover, mens matrisen gir en sirkulære grunnbevegelse i retning mot klokken. Fasediagrammet består av utadgående spiraler orientert mot klokken.



Vi visste at bevegelsen var mot klokken siden vi kjente igjen rotasjonsmatrisen. En mer metodisk måte ville vært å plott vektorfeltet til A i et punkt eller to. Ofte er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ gode punkter for dette siden de er enkle å finne. For eksempel

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så vektorfeltet går oppover mot høyre fra $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i første kvadrant. Dermed beveger sprialene, som er tangentielle til feltet seg mot klokken.

Oppgave 1

Skisser fasediagrammet til systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, egenverdier: $-2+i, -2-i$, egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, egenverdier: $3i, -3i$, egenvektorer: $\begin{bmatrix} -3+3i \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3-3i \\ 2 \end{bmatrix}$

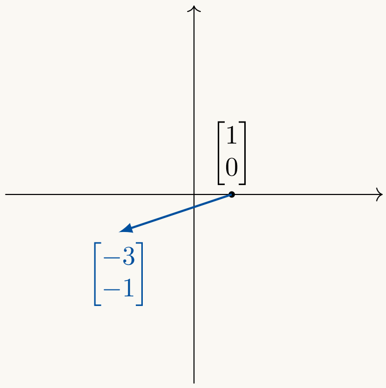
Svar

a)

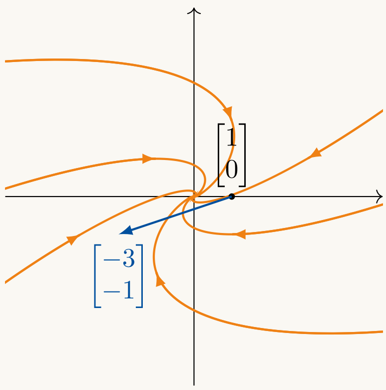
Siden $a = -2$ vil vi få en spiral på vei inn mot origo. For å finne orienteringen til spiralene så plotter vi vektorfeltet i $(1, 0)$, altså vektoren

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ut fra punktet $(1, 0)$



Spiralene som gir mening her går med klokken:



b)

Her ser vi at $a = 0$, så kurvene vil være ellipser. Når man skisserer kan man gjerne tegne sirkler for å markere dette, en sirkel er spesielt også en ellipse.