Oppgaver Fredag 11. august

1 Finn egenverdiene og de tilhørende egenrommene til

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

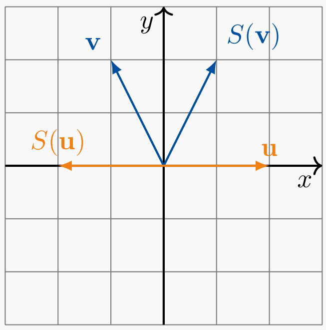
2 For a) til f) i forrige oppgave, la A være matrisen. Avgjør om A er diagonaliserbar og hvis den er det, finn en inverterbar matrise P og diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

3 La R_θ være rotasjonsmatrisen fra tidligere;

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Finn en formel for egenverdiene til R_θ.
Hint: Husk at $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

4 La S være en 2×2-matrise som speiler vektorer om $y - aksen$.



Finn egenverdiene og egenvektorene til S.

5 La A være en $n \times n$-matrise og $\lambda \in \mathbb{R}$ en egenverdi med tilhørende egenvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Avgjør i hver av deloppgavene nedenfor om påstanden er sann eller usann og forklar hvorfor.

a) $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
b) $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$
c) $\det(A - \lambda I) = 0$
d) Multiplikasjon med $\mathbf{x}$ skalerer A med en faktor λ.
e) Multiplikasjon med A skalerer $\mathbf{x}$ med en faktor λ.
f) $A\mathbf{x}$ kan ikke være $\mathbf{0}$
g) λ kan ikke være 0
h) $\mathbf{x}$ kan ikke være $\mathbf{0}$

6 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Finn en formel for A^k og regn ut A^{10}.

7 La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finn egenverdiene til A

8 La A være en 3×3-matrise med egenverdier $1, 2$ og 3. Vis at

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3$$

er lik nullmatrisen.

Løsning Fredag 11. august

1 a)

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \lambda(\lambda - 1)
\end{aligned}
$$

Likningen har løsninger $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 1$. Dette er egenverdiene til matrisen. Egenvektorene til λ_1 er $t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, og egenvektorene til λ_2 er $s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b)

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-2\lambda & 1 \\ 1 & 1-2\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{4}((1-2\lambda)(1-2\lambda) - 1) \\
&= \lambda(\lambda - 1)
\end{aligned}
$$

Likningen $p(\lambda) = 0$ har løsninger $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 1$. Dette er egenverdiene til matrisen. λ_1 har tilhørende egenvektorer $t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og λ_2 har tilhørende egenvektorer $s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c)

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 4 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 3
\end{aligned}
$$

Likningen $p(\lambda) = 0$ har løsninger $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -1$. Dette er egenverdiene til matrisen. Egenvektorene er henholdsvis $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Egenverdi $\lambda = -1$. Egenvektorer $t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

e) Egenverdi $\lambda = -1$. Egenvektorer $t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

f) Egenverdier $\lambda_1 = 1 + i$ og $\lambda_2 = 1 - i$. Egenvektorer, henholdsvis $t\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ og $s\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

2 a) Allerede diagonal.

b) Diagonaliserbar. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

c) Diagonaliserbar. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) Ikke diagonaliserbar

e) Ikke diagonaliserbar

f) Diagonaliserbar. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

3

$$\begin{aligned} \det(R_\theta - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) - \lambda & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\cos(\theta) - \lambda)^2 + \sin^2(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - 2\lambda\cos(\theta) + \lambda^2 + \sin^2(\theta) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\cos(\theta) + 1 \end{aligned}$$

Vi bruker ABC-formelen:

$$\lambda = \frac{2\cos(\theta) \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Vi ser som i eksempelet tidligere at egenverdiene er reelle kun hvis $\theta = k\pi$ for $k \in \mathbb{Z}$.

4 Ved speiling bevares lengden til vektorene, altså er eneste mulige egenverdier -1 og 1. Vi kan se at

$$S\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad S\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

Altså er -1 egenverdi til S med tilhørende egenvektorer $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, og 1 er egenverdi med tilhørende egenvektorer $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$.

Vi kunne alternativt observert at

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

og at

$$\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

kun er en likhet hvis $\lambda = -1$ og $y = 0$, eller $\lambda = 1$ og $x = 0$.

5

a) Sann
b) Sann
c) Sann
d) Usann
e) Sann
f) Usann
g) Usann
h) Sann

6 Egenverdiene til A er 3 og -5 med egenvektorer henholdsvis $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Vi lar dermed

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

og finner

$$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Fra $A = PDP^{-1}$ vet vi at $A^k = PD^kP^{-1}$. Vi regner ut det siste produktet eksplisitt:

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-5)^k \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 \cdot 3^k + 2 \cdot (-5)^k & 3 \cdot 3^k - 3(-5)^k \\ 4 \cdot 3^k - 4 \cdot (-5)^k & 2 \cdot 3^k + 6 \cdot (-5)^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

For $k = 10$ har vi

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 2485693 & -3639966 \\ -4853288 & 7338981 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{7}$

$$\det\left(\begin{bmatrix}1&0&4\\0&3&3\\1&0&1\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda&0&4\\0&3-\lambda&3\\1&0&1-\lambda\end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned}&=(1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&3\\0&1-\lambda\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}0&3-\lambda\\1&0\end{vmatrix}\\&=(1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)-4(3-\lambda)\\&=(3-\lambda)((1-\lambda)^2-4)\\&=(3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)\end{aligned}$$

$\lambda=3$ er en av egenverdiene, for de to siste bruker vi ABC-formel på siste faktoren i determinanten.

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$$

Matrisen har egenverdier 3 og -1.

$\boxed{8}$ Dette er en konsekvens av Cayley-Hamilton teoremet, men siden vi ikke har sett på det teoremet, løser vi det eksplisitt.

Vi begynner med å observere at siden A har tre ulike egenverdier, så må matrisen være diagonaliserbar. Altså kan vi finne en inverterbar matrise P og diagonalmatrise

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

slik at $D=P^{-1}AP$. Hvis vi ganger

$$A^3-6A^2+11A-6I_3$$

med P fra venstre og P^{-1} fra høyre får vi

$$\begin{aligned}P^{-1}(A^3-6A^2+11A-6I_3)P&=P^{-1}A^3P-6P^{-1}A^2P+11P^{-1}AP-6P^{-1}P\\&=D^3-6D^2+11D-6I_3\end{aligned}$$

og vi har

$$D^3-6D^2+11D-6I_3=\begin{bmatrix}1^3-6\cdot1^2+11\cdot1-6&0&0\\0&2^3-6\cdot2^2+11\cdot2-6&0\\0&0&3^3-6\cdot3^2+11\cdot3-6\end{bmatrix}$$

Så ser vi

$$\begin{aligned}1^3-6\cdot1^2+11\cdot1-6&=1-6+11-6=0\\2^3-6\cdot2^2+11\cdot2-6&=8-24+22-6=0\\3^3-6\cdot3^2+11\cdot3-6&=27-54+33-6=60-60=0\end{aligned}$$

Dermed er

$$A^3-6A^2+11A-6I_3=P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$