



1. Egenvektor

Vi har sett at når vi tar produktet av en matrise med en vektor får vi som regel en helt annen vektor ut. For eksempel, hvis vi ser på matrisen

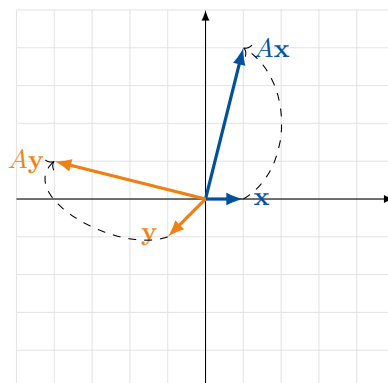
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

og vektorene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ser vi at produktet av dem blir helt andre vektorer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



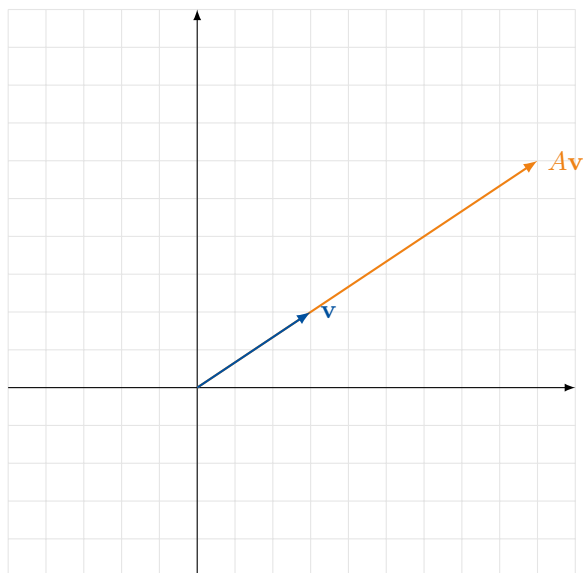
Det er noen vektorer som samarbeider bra med en gitt matrise. Vi kaller disse **egenvektorene** til matrisen. For matrisen A over er en av dem gitt ved

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hvis vi ser på $A\mathbf{v}$ får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Altså bare en skalering av originalvektoren.



Definisjon

La A være en $n \times n$ -matrise. Hvis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ er en ikke-null vektor og $\lambda \in \mathbb{C}$ er en skalar slik at

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

så er \mathbf{x} en **egenvektor** til A med **egenverdi** λ .



Oppgave 1

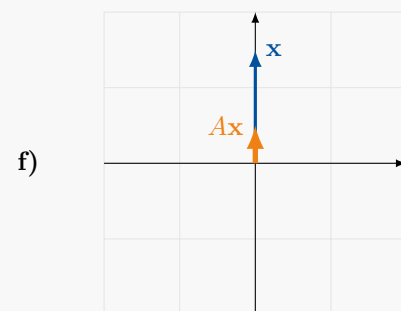
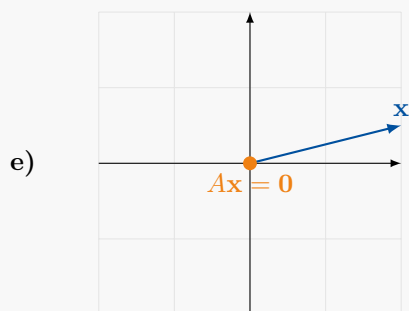
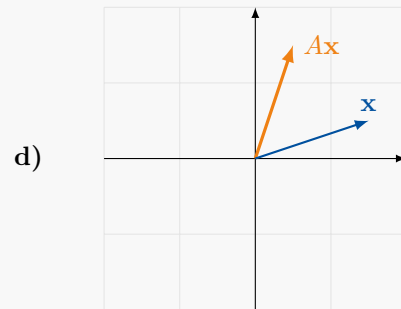
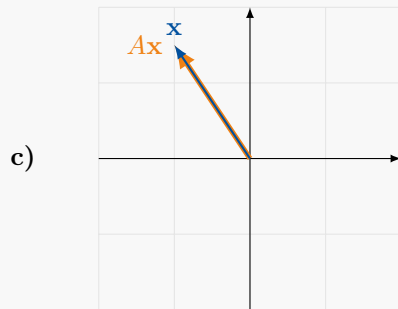
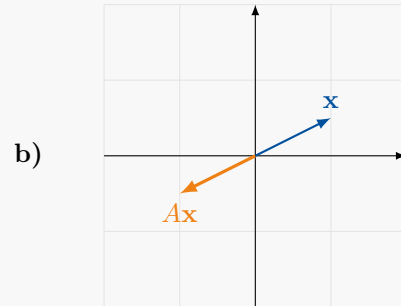
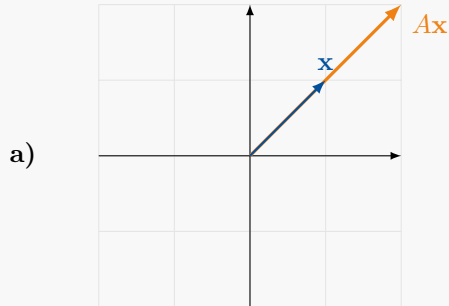
Avgjør om $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Oppgaver

For hvert av tilfellene under er A en 2×2 -matrise og x en todimensjonal vektor. Svar på følgende to spørsmål for hver av dem:

1. Er x en egenvektor til A ?
2. Hvis x er en egenvektor, hva er egenverdien λ ?





Merknad

Bemerk deg at vi krever at \mathbf{x} er ulik nullvektoren for at det skal være en egenvektor. Det er ikke noe spesielt med $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ side $A\mathbf{0}$ alltid er lik $\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$.

Bemerk deg også at vi tillater λ å være ett komplekst tall. Faktisk er definisjonen av egenvektorer interessant om vi lar både vektoren og matrisen være komplekse, men for enkelthetens skyld begrenser vi oss for nå.

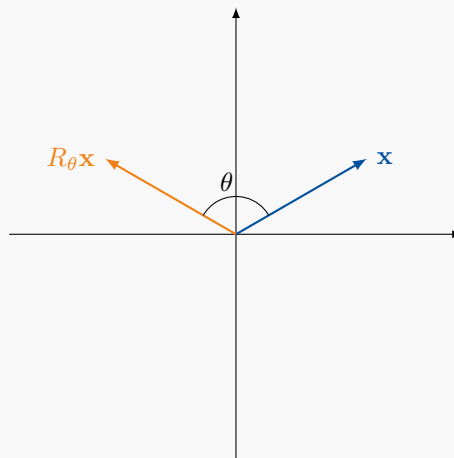


Eksempel 1.0.1

Hvis vi for en vinkel θ lar R_θ være 2×2 -matrisen

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Denne kan vi tolke som en rotasjonsmatrise. Hvis vi ganger den med en vektor får vi ut igjen samme vektor, bare θ radianer rotert mot klokken.



Oppgave 2

For hvilke θ har matrisen over reelle egenverdier?

Hvis matrisen har en reell egenverdi λ , må den tilhørende egenvektoren \mathbf{x} sendes til et sted på linjen utspent av \mathbf{x} . Dermed må $R_\theta \mathbf{x} = \mathbf{x}$ eller $R_\theta \mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Dette tilsvarer en rotasjon med enten 0 eller π radianer. Vinkler er periodiske, så generelt har vi reelle egenverdier for $\theta = k\pi$.

Finne egenvektorer



Spørsmål

Hvordan finner vi egenvektorer?



Svar

La oss se på den definerende egenskapen:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

I denne likningen kan vi flytte $\lambda\mathbf{x}$ til venstresiden og få

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

eller ekvivalent

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

hvor I er identitetsmatrisen. Vi ser altså etter en ikke-null løsning til $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. For at denne skal ha en ikke-null løsning kan ikke $(A - \lambda I)$ være inverterbar. Altså må vi

nødvendigvis ha

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Skriver vi ut venstresiden får vi et **polynom** av grad n med λ som ukjent. Dette polynomet kaller vi det **karakteristiske polynom** til A .

Vi har altså funnet ut at egenverdiene til A er gitt ved røttene til polynomet $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Når vi har funnet en egenverdi λ kan vi så finne tilhørende egenvektorer ved å løse likningen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.



Resultat 1.0.1

La A være en $n \times n$ -matrise.

- ▶ Egenverdiene til A er gitt ved løsningene til likningen

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

- ▶ Hvis λ er en egenverdi til A , er de tilhørende egenvektorene gitt ved de ikke-trivielle løsningene til

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$



Eksempel 1.0.2

Vi finner nå egenvektorene og egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene finnes ved

$$\det(A - \lambda I_2) = 0,$$

Vi ser først på hvordan matrisen $A - \lambda I_2$ looks ser ut:

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & -3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Det karakteristiske polynom er

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 3 \cdot 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 15. \end{aligned}$$

Det betyr at vi må løse andregradslikningen

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

for å finne egenverdiene. Vi løser som normalt og får:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-15)}}{2} = -1 \pm 4$$

Egenverdiene er altså: 3 og -5.

Vi finner egenvektorene til 3 ved å løse likningen $(A - 3I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi løser denne ved å radreducere matrisen $(A - 3I_2)$:

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får en fri variabel og løsningen er

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

for alle tall t . De tilhørende egenvektorene til 3 er altså alle vektorene i

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

utenom nullvektoren.

Vi finner alle egenvektorene til -5 ved å løse likningen $(A + 5I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi kan løse denne likningen ved å redusere matrisen $(A + 5I_2)$:

$$A + 5I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får en fri variabel, og løsningen er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t$$

for alle tall t . De tilhørende egenvektorene til egenverdien -5 er derfor alle vektorene i

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\},$$

utenom nullvektoren.

Eksempel 1.0.3 Fibonacci-tall

Fibonacci-tallene er en kjent tallfølge gitt ved

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & \cdots & F_n \\ \hline 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \cdots & F_{n-1} + F_{n-2} \end{array}$$

Vi kan også beskrive tallfølgen som

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} \text{ med startsteg } \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Vis at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer til

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem de tilhørende egenverdiene λ_1 og λ_2 til \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 .

Husk: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

b) Vis at

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}$$

Hint: Løs vektorlikningen

$$x \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Vi regner ut

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \pm \sqrt{5} + 2 \\ 1 \pm \sqrt{5} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} \frac{2(1 \pm \sqrt{5} + 2)}{1 \pm \sqrt{5}} \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

og vi har

$$\begin{aligned} \frac{2(1 \pm \sqrt{5} + 2)}{1 \pm \sqrt{5}} &= \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} \cdot \frac{1 \mp \sqrt{5}}{1 \mp \sqrt{5}} \\ &= \frac{6 \mp 6\sqrt{5} \pm 2\sqrt{5} - 2 \cdot 5}{1 - 5} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{5}(-6 + 2)}{-4} \\ &= \frac{-4 \mp 4\sqrt{5}}{-4} \\ &= 1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

Så vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} 1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix}$$

og dermed er

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix}$$

egenvektorer med tilhørende egenverdier

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{5} \text{ og } \lambda_2 = 1 - \sqrt{5}$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_4 \\ F_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La nå \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 være som i a), da har vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2\sqrt{5}} (\lambda_1^n \mathbf{v}_1 - \lambda_2^n \mathbf{v}_2)$$

Altså har vi

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\lambda_1^n \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda_2^n \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

og dermed

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$