Oppgaver Torsdag 17. august

1 Løs likningssystemene

a) $\begin{cases} 2x + y \quad\quad + 3w = 5 \\ -x \quad\quad + z + 2w = -2 \\ x + y \quad\quad + \quad w = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y \quad\quad + 3w = 7 \\ -x \quad\quad + z + 2w = -1 \\ x + y \quad\quad + \quad w = 6 \end{cases}$

2 Anta at vi har gitt ett lineært likningssystem (ikke difflikninger) bestående av m likninger og n ukjente. Hvilke av de følgende ni forskjellige tilfellene i tabellen under er mulige?

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger			
én løsning			
uendelig mange løsninger			

3 Finn en 2×2-matrise A slik at

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4 Finn en 3×2-matrise A slik at

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og } A \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5

a) For hvilke verdier $a \in \mathbb{R}$ har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

en invers?

b) Vis at

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

når $a = 1$.

6 La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Avgjør om $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige.

b) Hva er dimensjonen til underrommet $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \subseteq \mathbb{R}^3$?

c) Finn antall frie parametre til den generelle løsningen av likningssystemet

$$\begin{cases} 5x + y \quad\quad = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

7 Finn egenvektorene og egenverdiene til

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{8}$ La P være en 3×3-matrise hvor kolonnene er lineært uavhengige egenvektorer til

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn $P^{-1}AP$.

$\boxed{9}$ For hvilke a og b har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix}$$

komplekse egenverdier?

$\boxed{10}$ Finn e^{At} for

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}$$

når k er en reell konstant.

$\boxed{11}$ Løs initialverdiproblemene

a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, for λ reell.

$\boxed{12}$ Skisser fasediagrammet til $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ for

a) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ hvor $\lambda < 0$ er reell.

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Merk: Disse vil nok se noe annerledes ut enn de vi har sett på tidligere.

$\boxed{13}$ Løs systemene under for initialbetingelse $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Skisser fasediagrammet.

a) $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -4x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$

$\boxed{14}$ Omformulér følgende andreordens differensiallikninger til førsteordenssystem.

a) $y'' - y = 0$

b) $y'' + 5y' - 2y = 0$

c) $y'' - \frac{1}{2}y' = 0$

Løsning Torsdag 17. august

$\boxed{1}$ Vi ser at både a) og b) har samme venstreside, så vi kan løse begge systemene likt ved å radredusere følgende utvidede matrise

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Vi kjører i gang med radreduksjon (Hvis du er stødig på radreduksjon kan du her godt benytte digitale hjelpemidler)

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

a) Vi ser vekk fra siste kolonne i matrisene over, og leser ut løsningene

$$\begin{aligned} x + 2w &= 4 \\ y - w &= -3 \\ z + 4w &= 2 \end{aligned}$$

w har ingen ledende ener og kan dermed velges fritt. Vi setter $w = t$ og får

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2t \\ y &= -3 + t \\ z &= 2 - 4t \\ w &= t \end{aligned}$$

I vektornotasjon er løsningene gitt ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Vi ser vekk fra nest-siste kolonne i matrisene over, og leser ut løsningene

$$\begin{aligned} x + 2w &= 1 \\ y - w &= 5 \\ z + 4w &= 0 \end{aligned}$$

w er nok en gang fri, så ved å sette $w = t$ får vi

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= 5 + t \\ z &= -4t \\ w &= t \end{aligned}$$

og i vektornotasjon

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi bemerker oss at begge løsningene har én konstand-del og én varierende del. I tillegg er den varierende delen lik, som forventet.

$\boxed{2}$

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger	✓	✓	✓
én løsning	✗	✓	✓
uendelig mange løsninger	✓	✓	✓

Forklaring: I hvert tilfelle må vi enten finne et eksempel (i så fall er det jo mulig - vi fant et eksempel!), eller forklare hvorfor det ikke er mulig å finne et eksempel.
Ingen løsning: Uavhengig av hvor mange ligninger og ukjente vi skal ha kan vi lage et eksempel hvor en av ligningene sier $0 = 1$. Dette korresponderer til parallelle linjer/plan/rom med ingen felles punkter.
Uendelig mange løsninger: Vi må forsikre oss om at vi kan få til en fri variabel i hvert tilfelle. I tilfellet $m < n$ kan vi ta 1×2 systemet $x + y = 0$, hvor y er fri. For $m = n$ kan vi legge til ligningen $0 = 0$ slik at vi har to ligninger med to ukjente, og y er stadig fri. Skal vi ha flere ligninger enn ukjente kan vi legge til ligningen $0 = 0$ nok en gang.
Én løsning: For $m = n$ kan vi ta ligningssystemet $x = 1$, det har en unik løsning. Dersom du ikke synes det er et skikkelig system kan du slenge på $y = 1$. For å få ett eksempel hvor $m > n$ legger vi til ligningen $0 = 0$. Men nå må vi tenke oss om, hva skjer om vi har flere ukjente enn ligninger? Vi setter opp totalmatrisen til systemet, denne er lengre enn den er høy siden vi har flere ukjente enn ligninger. Dermed kan vi ikke ha ledende ener i hver kolonne. Hver kolonne som ikke har et pivotelement gir en fri variabel. Dermed har systemet enten ingen, eller uendelig mange løsninger.

$\boxed{3}$ En generell 2×2-matrise A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Fra første likhet ser vi

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

Altså må

$$A = \begin{bmatrix} 3 & b \\ 5 & d \end{bmatrix}$$

Fra andre likning har vi

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & b \\ 5 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+b \\ 5+d \end{bmatrix}$$

Altså får vi to $b = -1 - 3 = -4$ og $d = 0 - 5 = -5$. Altså er

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Vi kunne eventuelt brukt at $A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w}$, sammen med $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

og regnet ut

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ En generell 3×2-matrise ser ut som

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Her kunne vi gjort som i forrige oppgave og naivt multiplisert ut, fått likningssystemer med 6 likninger og 6 ukjente som vi hadde løst. Vi kan også observere at

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \left(3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

og

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right),$$

samt at

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\\e & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\c\\e\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}a & b\\c & d\\e & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\d\\f\end{bmatrix}.$$

Blander vi alt det inn i en lapskaus, så ramler det ut løsninger:

$$\begin{bmatrix}a\\c\\e\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\left(3\cdot A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 2\cdot A\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right) = \left(3\begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}15\\4\\-5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}b\\d\\f\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\left(A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}5\\3\\0\end{bmatrix}$$

Altså

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}15 & 5\\4 & 3\\-5 & 0\end{bmatrix}.$$

5

a) Vi sjekker determinanten til A:

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 0\\a & 1\end{vmatrix} + a\begin{vmatrix}a & 1\\0 & a\end{vmatrix} = 1 + a^3$$

En kvadratisk matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten er ulik 0. Her ser vi at hvis $a \neq -1$ er determinanten ulik 0 og dermed inverterbar.

b) Vi sjekker om produktet blir identitetsmatrisen

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Vi kunne også sjekket produktet i motsatt rekkefølge, men det skal følge fra hva vi allerede har regnet. Her er multiplikasjonstabellen:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 1 & 0 & 1\\
 & & & 1 & 1 & 0\\
 & & & 0 & 1 & 1\\
\hline
1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0\\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2
\end{array}$$

6

a) En samling av vektorer er lineært uavhengig hvis og bare hvis matrisen med dem som kolonner har full rang. En kvadratisk matrise har full rang hvis og bare hvis den er inverterbar eller ekvivalent, om determinanten er ulik 0. Altså

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\2 & 1 & 2\\1 & 1 & 3\end{bmatrix} &= 5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\\
&= 5\cdot(3-2) - 1\cdot(6-2) + 0\cdot(2-1)\\
&= 5 - 4 = 1\end{aligned}$$

b) Dimensjonen til ett underrom er gitt ved antall lineært uavhengige vektorer som behøves for å spenne ut rommet, eller ekvivalent antall vektorer i basisen. Her ser vi at rommet er utspent av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ og de er lineært uavhengige, så underrommet har dimensjon 3.

c) Vi ser at den utvidede matrisen til likningssystemet er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Siden vi allerede vet at de tre første kolonnene er lineært uavhengige og så vil vi få tre ledende enere ved radreduksjon. Ingen kolonner mangler ledende ener, og vi får ingen frie variabler.

$\boxed{7}$ a) Egenverdier finner vi ved

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} &= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)\lambda(\lambda+2) - (\lambda+2) \\ &= -(\lambda+2)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = i$ og $\lambda_3 = -i$. Egenvektorene finner vi ved å finne følgende nullrom:

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_2 I) = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} -i & 0 & -1 \\ 1 & -2-i & 2 \\ 1 & 0 & -i \end{bmatrix} = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_3 I) = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & -2+i & 2 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix} = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

b) Egenverdi $\lambda_1 = -1$ med lineært uavhengige egenvektorer $t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenverdi $\lambda_2 = 2$ med egenvektor $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Egenverdi $\lambda_1 = 2$ med egenvektorer $t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenverdi $\lambda_2 = 5$ med egenvektorer $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Egenverdi $\lambda = 3$ med egenvektorer $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{8}$ Vi finner P ved fra vektorene vi regnet ut i forrige oppgave, altså

$$P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversmatrisen fant vi ved hjelp av tekniske hjelpemidler. Da er alt klart til å regne ut $P^{-1}AP$:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}$$

Dette gjenkjenner vi som diagonalmatrisen med egenverdiene til A langs diagonalen. Det var ikke et voldsomt sjokk, siden vi kan se at A er diagonaliserbar, og dermed $A = PDP^{-1}$.

$\boxed{9}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 1 & -b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (b-1)\lambda + (a+b)$$

$$\lambda = \frac{1-b \pm \sqrt{(b-1)^2+4(a+b)}}{2}$$

Komplekse løsninger hvis det under roten er negativt. Altså hvis $(b-1)^2 + 4(a+b) < 0$.

$\boxed{10}$ I stedet for gå rett frem her så kan vi bruke følgende observasjon.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k^2 & 0 \\ 0 & -k^2 \end{bmatrix} = -k^2 I, \quad A^3 = -k^2 IA = -k^2 A$$

Altså må

$$A^{2n} = (-1)^n k^{2n} I, \quad A^{2n+1} = (-1)^n k^{2n} A$$

Setter vi nå inn i rekkeutviklingen til matriseeksponenten får vi

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (tk)^{2n}}{(2n)!} I + \frac{(-1)^n (tk)^{2n}}{(2n+1)!} A \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1} k^{2n}}{(2n)!} \right) I + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (tk)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \frac{1}{k} A \\ &= \cos(kt) I + \sin(kt) \frac{1}{k} A \\ &= \cos(kt) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin(kt)}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(kt) & \frac{\sin(kt)}{k} \\ -k\sin(kt) & \cos(kt) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{11}$

a) Egenverdiene til matrisen er $\lambda_1 = 2i$ og $\lambda_2 = -2i$. Egenvektorene til λ_2 er utspent av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$. Løsningen er dermed

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{v}) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{v}) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2t)+\sin(2t) & \cos(2t)-\sin(2t) \\ \cos(2t) & -\sin(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2t)-\sin(2t) & 2\sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t)+\sin(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ &= b_1 \begin{bmatrix} \cos(2t)-\sin(2t) \\ -\sin(2t) \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 2\sin(2t) \\ \cos(2t)+\sin(2t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Vi kan se at matrisen er på Jordan form. Vi får at

$$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og løsningen er dermed

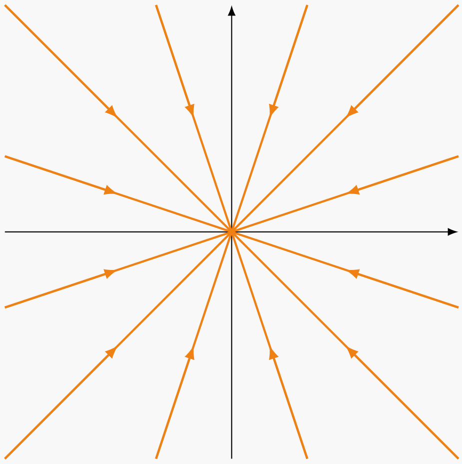
$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda t} + b_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}.$$

$\boxed{12}$

a) Den generelle løsningen til systemet er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

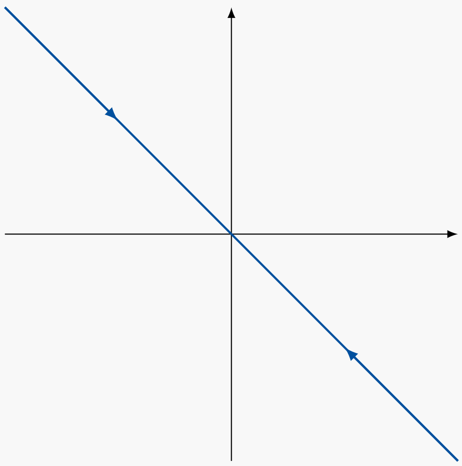
Altså vil alle løsningskurvene være rette linjer i planet, og siden $\lambda < 0$, vil de være orientert inn mot origo.



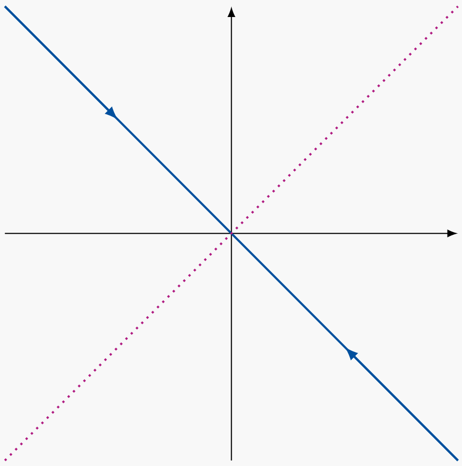
b) Egenverdi -2 med egenvektorer utspent av $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenverdi 0 med egenvektorer utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

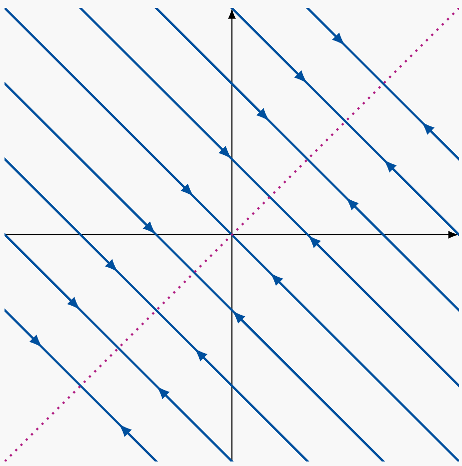
Hvis $c_2 = 0$ og $c_1 > 0$ får vi løsningskurver inn mot origo som følger



Hvis $c_1 = 0$, får vi konstante løsninger gitt som punkter langs linjen utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:



Hvis $c_1 \neq 0$ og $c_2 \neq 0$, vil vi få kopier av de blå løsningskurvene forskjøvet langs linjen utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:



$\boxed{14}$ Vi setter $x_1 := y$ og $x_2 := y'$ og får

a) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$