



1. System av differensialligninger

1.1. Determinant, Spor og Fasediagram

La oss se litt på en annen måte for å avgjøre formen på løsningene til

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Vi innfører først et annet begrep som noen ganger dukker opp i skriblerier.

i Definisjon

La A være en 2×2 -matrise,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Sporet (På engelsk, *trace*) av A er gitt ved $\text{tr } A = a + d$.

Vi kan også notere oss bak øret at enkelte har valgt å kalle sporet til en matrise for *trase* på norsk.

Hvis vi bretter opp ermene og ser hardt på hvordan vi løste systemer av difflikninger, kan vi muligens oppdage en sammenheng mellom determinanten og sporet til en matrise, og løsningene av det tilhørende systemet.

Vi har sett at løsningene er ganske så avhengige av egenverdiene til matrisen. De finner vi ved å regne ut røttene til matrisens karakteristiske polynom.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} &= (a - \lambda)(d - \lambda) - cb \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - cb \\ &= \lambda^2 - \text{tr } A\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

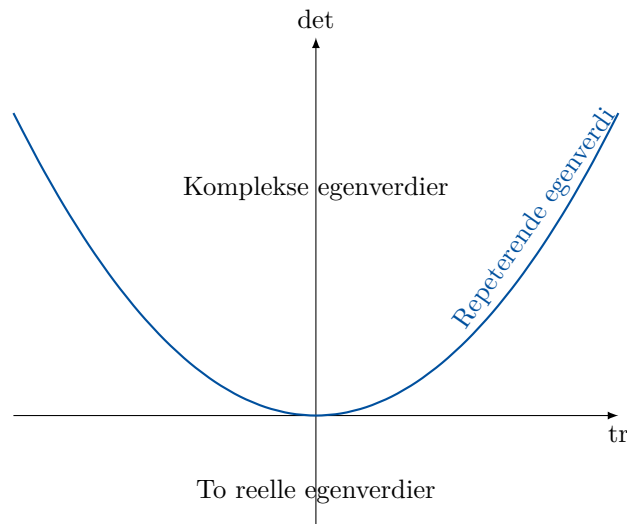
Røttene finner vi ved ABC-formel:

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det(A)}}{2}$$

Vi kan altså observere at

- ▶ Hvis $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A > 0$, får vi to reelle egenverdier,
- ▶ Hvis $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A < 0$, får vi to komplekse egenverdier, og
- ▶ Hvis $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = 0$, får vi én repeterende reell egenverdi.

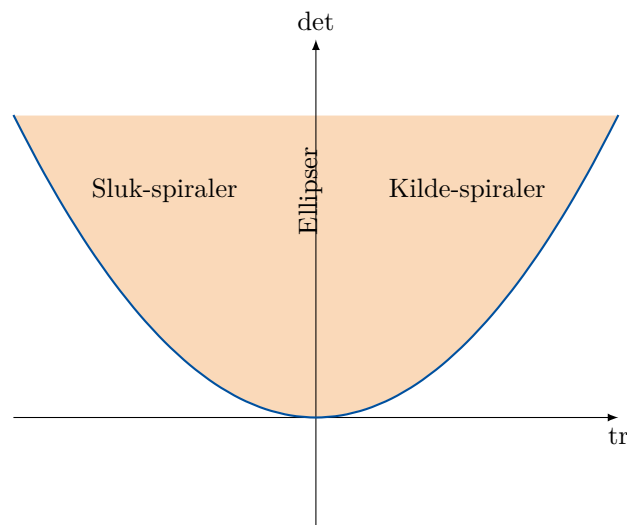
Vi kan visualisere alt dette grafisk på følgende vis. Observer i tredje tilfelle at for repeterende egenverdier har vi $\det A = \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{4}$. Lar vi x-aksen i xy-koordinatet betegne sporet av en matrise, og y-aksen betegne determinanten, får vi at matriser B med én egenverdi gir punkter $(\operatorname{tr} B, \det B)$ på følgende graf



Over grafen finner vi matrisene med to komplekse egenverdier, og under grafen finner vi matrisene med reelle egenverdier.

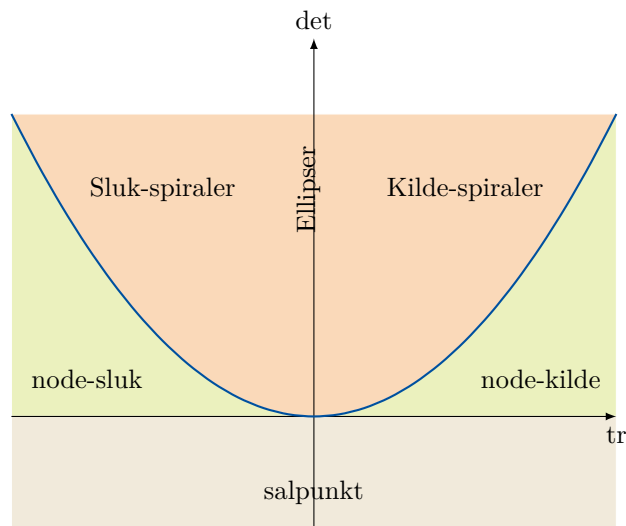
Husker vi tilbake til det komplekse tilfellet, så kan vi se at $\operatorname{tr} A$ avgjør om vi får ellipser, eller spiraler.

- ▶ $\operatorname{tr} A < 0$ gir spiraler inn mot origo, også kalt **sluk-spiraler**
- ▶ $\operatorname{tr} A > 0$ gir spiraler vekk fra origo, også kalt **kilde-spiraler**
- ▶ $\operatorname{tr} A = 0$ gir ellipser



For to distinkte reelle egenverdier har vi tre tilfeller som kan opptre; begge er negative, begge er positive, eller de har motsatt fortegn av hverandre.

- ▶ Hvis $\det A < 0$ har egenverdiene forskjellig fortegn, og vi vil få et **salpunkt** i løsningene.
- ▶ Hvis $\det A > 0$ og $\text{tr}(A) > 0$ får vi to positive egenverdier, løsningene beveger seg vekk fra origo, og vi kaller typen for **node-kilde**
- ▶ Hvis $\det A > 0$ og $\text{tr}(A) < 0$ får vi to negative egenverdier, løsningene beveger seg inn mot origo, og vi kaller typen for **node-sluk**.



1.2. Fra n-te ordens difflikning

Vi ser tilbake til kursets andre dag og observere at løsningene til andreordens difflikninger likner noe voldsomt på hva vi har observert for systemer av difflikninger. Dette skal vi nå se at ikke er tilfeldig.

La oss forestille oss en tredjeordens lineær difflikning med konstante koeffisienter

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

For å løse denne kan vi forsøksvis introdusere noen nye funksjoner, for eksempel

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= y'(t) \\x_3(t) &= y''(t)\end{aligned}$$

Dermed kan vi skrive om difflikningen som et system av førsteordens difflikninger.

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= x_3 \\x_3' &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3\end{aligned}$$

eller i matrisenotasjon

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Generelt har vi



Teorem 1.2.1

En n-te ordens difflikning

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(t)$$

kan gjøres om til et system av førsteordens difflikninger

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

hvor

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\x_2 &= y' \\x_3 &= y'' \\&\vdots \\x_{n-1} &= y^{(n-2)} \\x_n &= y^{(n-1)}\end{aligned}$$

Andreordens difflikning

La oss nå se på den homogene andreordens difflikningen,

$$y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

Skriver vi om dette til et system får vi

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Disse har vi lært å løse tidligere i uken, vi start med å finne det karakteristiske polynomiet

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + a_1) - (-a_0) = \lambda^2 + \lambda a_1 + a_0$$

og avhengig av om polynomiet har reelle, komplekse eller en enkel rot, finner vi egenvektorer (og eventuelt generalisert egenvektor). Vi kan også bemerke oss at dette polynomiet er det samme som vi løse andreordens difflikninger tidligere. La oss gå videre og påstå at hvis λ er en rot av $p(\lambda)$ (altså en egenverdi), så er $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ en egenvektor av matrisen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda \\ -a_0 - a_1 \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} \text{ siden } \lambda \text{ er en rot av } p(\lambda) \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To reelle egenverdier

Hvis

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

har to reelle egenverdier er systemet løst av

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

og hvis vi leser ut første elementet gjenoppdager vi løsningen $y(t)$ til difflikningen:

$$y(t) = x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Kun én egenverdi

Den eneste måten å få nøyaktig én løsning er om uttrykket under rottegnet i

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

er null. Altså $a_1^2 = 4a_0$ og $\lambda = \frac{-a_1}{2}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -4a_0 \end{bmatrix}$$

For å finne en løsning av systemet finner vi derfor en generalisert egenvektor ved å løse

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -4a_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{a_0}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{a_0}{2} \end{bmatrix} \right) \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Venstresiden er lik

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} & 1 \\ -a_0 & -\frac{a_0}{2} \end{bmatrix} \mathbf{w}$$

og vi ser at $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en løsning. Fikler vi litt med uttrykkene vi fant i tidligere seksjoner finner vi at vår generelle løsning er

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + c_2 e^{\lambda t} (t\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= c_1 e^{-a_0/2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0/2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-a_0/2} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} c_1 e^{-a_0/2t} + c_2 t e^{-a_0/2t} \\ c_1 e^{a_0 t} (1 - a_0/2) - c_2 t e^{-a_0 t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi leser nå løsningen til andreordens difflikningen ut fra første linje.

$$y(t) = x_1(t) = c_1 e^{-a_0/2t} + c_2 t e^{-a_0/2t} = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

som er nettopp den vi fant tidligere.

To komplekse egenverdier

Hvis vi har komplekse egenverdier $\lambda_{\pm} = a \pm ib$, kan vi fikle med løsningene vi fant tidligere og se at den generelle løsningen til systemet er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= c_1 e^{at} [\cos(bt)\text{Re}(\mathbf{v}) + \sin(bt)\text{Im}(\mathbf{v})] \\ &\quad + c_2 e^{at} [\cos(bt)\text{Im}(\mathbf{v}) - \sin(bt)\text{Re}(\mathbf{v})] \end{aligned}$$

Videre, siden vi vet at en egenvektor er gitt ved

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a - ib \end{bmatrix},$$

har vi

$$\text{Re}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \text{Im}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1 e^{at} \left[\cos(bt) \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} + \sin(bt) \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \right] \\ &\quad + c_2 e^{at} \left[\cos(bt) \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} - \sin(bt) \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

Leser vi nå ut første linje i denne løsningen, gjenoppdager vi løsningen på andreordensdifflikningen som

$$y(t) = x_1(t) = e^{at} [c_1 \cos(bt) + c_2 \sin bt].$$