Oppgaver Mandag 7. august

Gjør det dere selv ønsker av følgende oppgaver.

1 Avgjør om følgende funksjoner er en løsning av de tilhørende differensialligningene.

a) $y(t) = e^{2t}$, $y' - 2y = 0$ b) $y(t) = \sin(t)$, $y' + 3y = e^t$ c) $y(t) = \cos(t)$, $y'' + y = 0$

2 Finn alle løsningene til differensialligningene:

a) $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ b) $y' + 2y = 5$

3 Verifiser at både $y_1(t) = e^{-2t}$ og $y_2(t) = e^{3t}$ er løsninger til differensiallikningen

$$y'' - y' - 6y = 0$$

Er $y(t) = 10y_1(t) + 6y_2(t)$ også en løsning på differensiallikningen?

Gå sammen i grupper og løs en eller flere av de siste oppgavene sammen.

4 En medisin utskilles fra kroppen med en hastighet som er gitt ved

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\ln 2}{12}x$$

der x er mengden av medisin ved tiden t målt i timer.

Anta at en dose x_0 av medisinen injiseres i kroppen ved tidspunktet $t = 0$. Finn mengden av medisin i kroppen ved et vilkårlig tidspunkt t. Hvor mange timer tar det før mengden av medisin i kroppen er halvert?

5 I en vekstmodel for svin vil vi anta at dyrets vekt P (i kg) er P_0 ved $t = 0$ og vokser mot en grense L. Det antas at vekstraten (i kg/dag) er proporsjonal med det antall kilo som svinet fortsatt kan legge på seg. Kall proporsjonalitetskonstanten k.

Still opp en differensiallikning for vekten P som funksjon av tiden t og løs den. Skisser formen på løsningskurven.

Merk! I etterkant har jeg innsett at neste oppgave ikke behøver difflikninger og dermed ikke er altfor relevant.

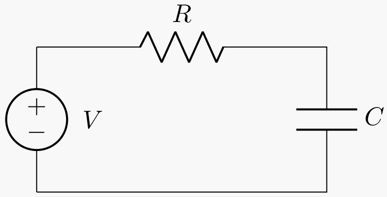
6 Radioaktive stoffer nedbrytes med en hastighet som er proporsjonal med den til enhver tid gjenværende mengde av stoffet. Halveringstiden er den tiden det tar før en mengde av stoffet er halvert.

En ulykke i en reaktor førte til at det radioaktive stoffet Polonium–210 som har halveringstid på 140 dager, trengte seg inn i styringsrommet for reaktoren. Målinger viste at da lekkasjen var tettet, var det 8 ganger så mye Polonium–210 i rommet som den maksimalt tillatte mengden M. Hvor mange dager tar det før mengden Polonium–210 er redusert til M?

Løsning Mandag 7. august

Fra løpende tekst:

$\boxed{7}$ **RC-krets**:



Først, la oss skrive $v_c(t)$ for spenningen over kondensatoren ved tiden t. Ved å anta $v_c(0) = 0$. får vi at

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)dt$$

hvor $i_c(t)$ er strømmen gjennom kondensatoren. Deriverer vi dette får vi

$$\dot{v}_c = \frac{1}{C}i_c.$$

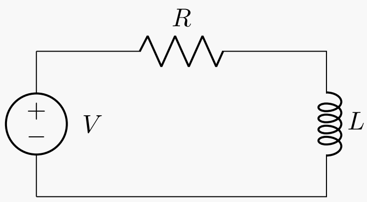
Nå bruker vi at strømmen gjennom motstanden er lik strømmen gjennom kondensatoren, så spesifikt $i_R = i_c = i$. Spenningsfallet i kretsen er lik summen av spenningsfallet over motstanden og kondensatoren, så vi finner spenningsfallet over motstanden som $v_R(t) = V(t) - v_c(t)$. Fra dette får vi så

$$\frac{V - v_c}{R} = i_R = i_c$$

Nå kaster vi alt sammen og ender opp med likningen

$$\dot{v}_c = \frac{1}{C}\left(\frac{V - vc}{R}\right) = \frac{1}{RC}V - \frac{1}{RC}v_c$$

RL-krets:



Vi skriver v_L for spenningen over spolen, og vi har

$$v_c(t) = L\frac{d}{dt}i.$$

Spenningen over kretsen totalt er null, så vi har

$$V = v_L + v_R = L\frac{d}{dt}i + iR$$

som er difflikningen vi søkte.

$\boxed{8}$ Ved forrige oppgave får vi følgende initialverdiproblem fra oppgaven:

$$\dot{i} + \frac{R}{L}i = \frac{k}{L}, \quad i(0) = 0$$

Integrerende faktor gir oss

$$\begin{aligned} i(t) =& e^{-t\frac{R}{L}}\left(\int \tfrac{k}{L}e^{t\frac{R}{L}}dt + C\right) \\ =& \frac{k}{R} + Ce^{-t\frac{R}{L}} \end{aligned}$$

Ved initialbetingelsen $i(t) = 0$, får vi at $C = -\frac{k}{R}$, og svaret blir altså

$$i(t) = \frac{k}{R}\left(1 - e^{-t\frac{R}{L}}\right)$$

9 Starten er ganske lik som i forrige oppgave. Vi skriver opp initialverdiproblemet.

$$\dot{i} + \frac{R}{L} i = \frac{\cos(t)}{L}, \quad i(0) = 0$$

Integrerende faktor gir oss

$$i(t) = e^{-t\frac{R}{L}} \left(\int \frac{\cos(t)}{L} e^{t\frac{R}{L}} dt + C \right)$$

La oss bruke de oppgitte verdiene for R og L siden de vil gjøre utregningen videre betydelig enklere. Da blir integralet

$$\int \cos(t) e^t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin(t) + \cos(t)) + C$$

Videre får vi da

$$i(t) = \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)) + Ce^{-t}$$

og med intialbetingelsen får vi $C = -\frac{1}{2}$:

$$i(t) = \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t) - e^{-t})$$

Fra oppgaveside

1

a) Løsning: $\left(\frac{d}{dt} e^{2t}\right) - 2e^{2t} = 2e^{2t} - 2e^{2t} = 0$

b) Ikke løsning: $\left(\frac{d}{dt} \sin(t)\right) + 3\sin(t) = \cos(t) + 3\sin(t)$. Vi kan lett observere at $\cos(t) + 3\sin(t) < 5$ for alle verdier av t, og siden $e^t > 5$ for alle $t > \ln(5)$, så er

$$\left(\frac{d}{dt} \sin(t)\right) + 3\sin(t) \neq e^t$$

c) Løsning: $\frac{d^2}{dt^2} \cos(t) = -\cos(t)$ og dermed

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(t) + \cos(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0.$$

2

a) Anta $t > 0$: $y(t) = \frac{1}{t^2} \left(\int t^4 dt + C \right) = \frac{C}{t^2} + \frac{t^3}{5}$.

b) $y(t) = e^{-2t} \left(\int 5e^{2t} + C \right) = \frac{5}{2} + Ce^{-2t}$

3 $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ er en løsning for alle verdier av a og b.

4 Vi vet at den generelle løsningen til difflikningen

$$\dot{x} = ax$$

er

$$x(t) = Ae^{at}.$$

Her er $a = -\frac{\ln 2}{12}$, så vi får generell løsning

$$\begin{aligned} x(t) =& Ae^{-\frac{\ln 2}{12} t} \\ =& A \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{12}} \\ =& A2^{-\frac{t}{12}} \\ =& A \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}} \end{aligned}$$

Ved initialbetingelsen $x(0) = x_0$, får vi løsningen

$$x(t) = x_0 \frac{1}{2}^{t/12}$$

Vi skal så finne når medisinmengden har halvert seg. Altså for hvilken t har vi

$$x_0 \frac{1}{2} = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/12}$$

Deler vi vekk x_0, ser vi at uttrykkene kun er like om potensen til $1/2$ er lik på begge sider. Altså

$$1 = \frac{t}{12} \Rightarrow t = 12.$$

Etter 12 timer har mengden medisin halvert seg.

5 Differensiallikningen er

$$\dot{P} = k(L - P)$$

med initialbetingelse $P(0) = P_0$.
Vi kan skrive om til formen

$$\dot{P} + kP = kL$$

Bruker vi integrerende faktor får vi

$$P(t) = e^{-kt}\left(\int e^{kt} \cdot kL dt + C\right) = L + Ce^{-kt}$$

Og med intialverdi får vi at

$$P_0 = P(0) = L + C \Rightarrow C = P_0 - L$$

Løsningen blir

$$P(t) = L + (P_0 - L)e^{-kt}$$

eller siden $P_0 - L < 0$ kan vi skrive

$$P(t) = L - (L - P_0)e^{-kt}$$

for å tydeliggjøre at det er en voksende funksjon.

6 Vi måler i denne oppgaven tiden i dager.

Oppgaven kan løses uten difflikning:

Polonium-210 halveres hver 140 dag. Hvis vi lar M_0 være mengden Polonium-210 da lekkasjen tettes, og M_1 være den maksimalt tillate mengden, får vi

$$M_0 = 8M_1 \Rightarrow M_1 = \frac{1}{8}M_0$$

Etter n halveringer har vi igjen

$$M(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n M_0$$

Polonium-210. For få få $M(n) = M_1$, må vi ha

$$\frac{1}{8}M_0 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n M_0 \Rightarrow n = 3$$

Altså tar det $3 \times 140 = 420$ dager fær