

# Innholdsfortegnelse

<b>1</b>	<b>Differensiallikninger</b>	<b>2</b>
1.1	Førsteordens difflikning . . . . .	3
1.1.1	Ecoli-bakterie . . . . .	3
1.1.2	Temperaturendring . . . . .	6
1.1.3	Integrerende faktor . . . . .	8
1.1.4	Elektroteknikk . . . . .	9



# 1. Differensiallikninger

Hva i all verden er en differensiallikning, sånn egentlig? Ett verktøy for å modellere virkeligheten er et svar, men helt konkret er det en likning hvor den ukjente er en funksjon og informasjonen vi har er om den deriverte av en viss grad til funksjonen. For eksempel er

$$\dot{y} + ty = 0$$

en differensiallikning hvor  $y$  er en ukjent funksjon avhengig av  $t$  og den deriverte av  $y$  er gitt som  $-ty$ . De fundamentale fysiske lovene vi etter noen århundrer har utviklet for å forstå verden/universet rundt oss er som oftest kun differensiallikninger gjemt bak en rekke mer eller mindre kule ord. Derfor må vi være komfortable med differensiallikninger for å kunne håpe på å løse problemer i sivilingeniør-verden.

Differensiallikninger modellerer deterministiske fysiske prosesser, og løsningen er en funksjon som beskriver prosessen. De enkleste differensiallikningene modellerer prosesser som foregår i tid. Det er derfor vanlig å bruke  $t$  som uavhengig variabel. Vi bruker  $x$  eller  $y$  eller  $z$  for den ukjente funksjonen, og en spesiell notasjon for derivert, oppfunnet av Isaac Newton:

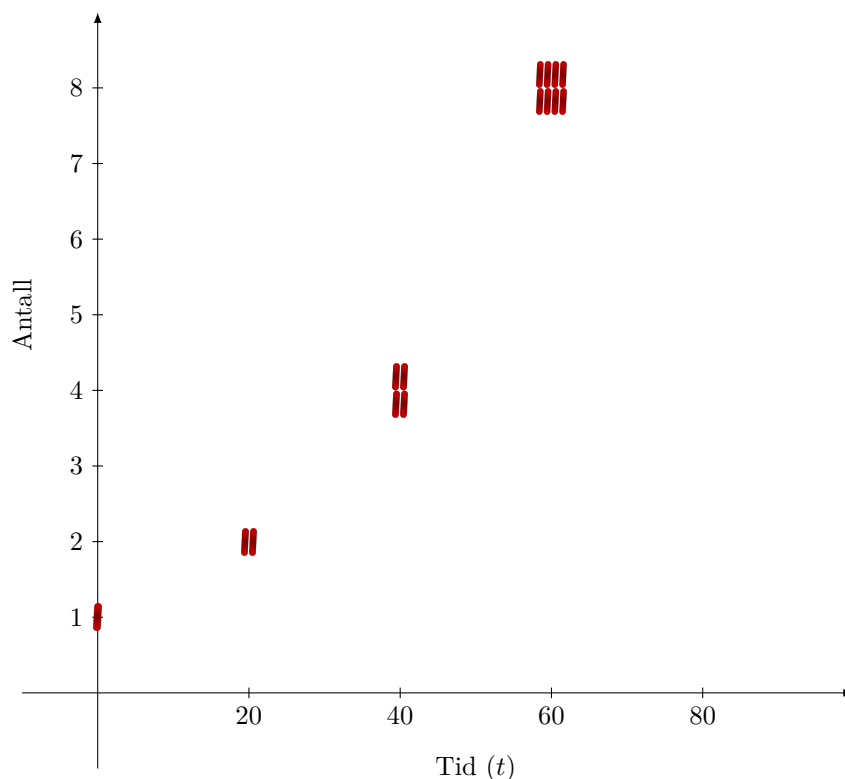
$$\dot{x} := \frac{dx}{dt}$$

Den beste og vanligste strategien for å lære seg differensiallikninger, er å begynne med de enkleste, skjønne hva de modellerer, og hvilke funksjoner som løser dem.

## 1.1. Førsteordens difflikning

### Ecoli-bakterie

Bakterier formerer seg ved celledeling. Under visse antagelser<sup>1</sup> vet vi at *E.coli*-bakterien deler seg omtrent hvert 20. minutt. Se plott av *E.coli*-kulturen under som startet med én bakterie.



Ut i fra dette kan vi lage en modell for å beskrive mengden *E.coli*-bakterier. Siden bakteriene deler seg hvert 20. minutt er vekstraten proporsjonal med antall bakterier. Lar vi  $x(t)$  være antall bakterier ved tidspunkt  $t$  får vi dermed

$$\dot{x} = ax$$

der  $a$  er en konstant kalt **proporsjonalitetskonstanten**.



### Oppgave 1

Finn løsningen av

$$\dot{x} = ax$$



*E.coli* bakterier, av Guhnfeldt, C.,  
Aftenposten, NTB scanpix.  
(<https://ndla.no/article/10334>).  
CC BY-NC-SA 4.0.

<sup>1</sup>37°C og nok plass/føde [https://en.wikipedia.org/wiki/Fission\\_\(biology\)#Speed\\_of\\_FtsZ-dependent\\_Fission](https://en.wikipedia.org/wiki/Fission_(biology)#Speed_of_FtsZ-dependent_Fission)

Hvis man ikke allerede vet løsningen på denne likningen, er den enkleste løsningsstrategien å ta en kvalifisert gjetning. Hvis vi slumper til å huske at eksponentialfunksjonen  $e^{\lambda t}$  har derivert lik  $\lambda e^{\lambda t}$  så er det naturlig å tippe at løsningen er på formen

$$x(t) = Ae^{\lambda t}.$$

Ethvert kvalifisert gjett fordrer at vi tester, så la oss gjøre det ved å sette inn funksjonen i likningen:

$$\underbrace{x(t)}_{A\lambda e^{\lambda t}} = \underbrace{ax(t)}_{aAe^{\lambda t}}$$

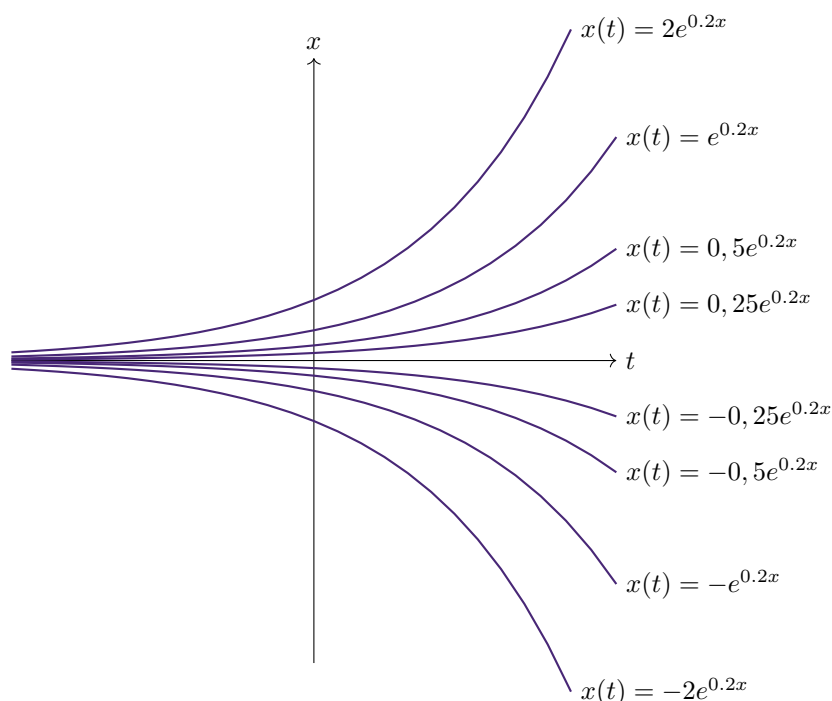
vi tillater oss å anta at  $A \neq 0$ , siden vi ønsker interessante løsninger, og siden  $e^{\lambda t} \neq 0$ , kan vi forkorte likheten over til

$$\lambda = a$$

Dette burde da gi oss at

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

er en løsning på likningen uavhengig av  $A$ . Dermed får vi en drøss med løsninger. Vi plotter ett utvalg av mulige løsninger for  $a = 0.2$ :



Dersom man har en petriskål full av bakterier og ønsker å gjøre en prediksjon på hvor stor kulturen er etter så og så lang tid, må vi starte med en kultur på en gitt størrelse. I matematikk kalles dette en **initialbetingelse**, og en særdeles populær en er

$$x(0) = 1.$$

Kombinasjonen av en differensiallikning og en initialbetingelse kalles et **initialverdiproblem**.



## Opgave 2

Finn løsningen til initialverdiproblemet

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = 2$$

Hvordan skal vi angripe dette problemet da? Jo, vi begynner med å skrive opp den generelle løsningen vi fant over, nemlig

$$x(t) = Ae^{at}$$

Hvis dette også skal tilfredstille betingelsen  $x(0) = 2$  så må vi pent få følgende likhet til å stemme:

$$A = Ae^0 = x(0) = 2$$

Dermed er løsningen vår

$$x(t) = 2e^{at}$$

## ? Spørsmål

Kunne vi funnet en annen løsning på oppgaven?

## 💡 Svar

La oss tenke oss at  $y$  er en annen løsning på samme initialverdiproblem. Hvis vi deriverer  $e^{-at}y(t)$  får vi

$$\frac{d}{dt}e^{-at}y(t) = -ae^{-at}y(t) + e^{-at}\dot{y}(t) = e^{-at}(-ay(t) + \dot{y}(t)) = 0.$$

Dermed må  $e^{-at}y(t)$  være en konstantfunksjon:

$$e^{-at}y(t) = K$$

Rydder vi opp får vi at

$$y(t) = Ke^{at}.$$

Nå, siden  $y(0) = 2$ , får vi  $y(t) = 2e^{at} = x(t)$ .  $x(t)$  er dermed den eneste mulige løsningen på initialverdiproblemet. Vi sier at løsningen er entydig, og svaret på spørsmålet er **nei**.

Hadde vi heller brukt initialbetingelsen  $x(0) = x_0$ , kunne vi gjennomført samme argumentasjon som over, og fått følgende generelle resultat.

## ☰ Resultat 1.1.1

Initialverdiproblemet

$$\dot{x} = ax \quad x(0) = x_0$$

har entydig løsning

$$x(t) = x_0e^{at}.$$

## ✎ Oppgave 3

La oss gå tilbake til E.coli-bakteriene over. Vi kan godt si at vi begynner med 1 bakterie, så initialverdiproblemet er

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = 1$$

Men hva i huleste er  $a$ ? Jo, det avhenger av om vi måler tiden  $t$  i timer, minutter, sekunder eller andre tidsenheter.

Finn  $a$  dersom vi måler tiden i

- a) timer
- b) minutter
- c) sekunder

## Temperaturrendring

En glup type kalt Newton gjorde rundt år 1700 noen forsøk som ledet til en lov om nedkjøling/oppvarming. Han postulerte det følgende



### Resultat 1.1.2 Newtons nedkjølings-/oppvarmingslov

Varmetapet til ett objekt er direkte proporsjonalt med temperaturdifferansen mellom objektet og omgivelsene.

Hvis vi ønsker å jobbe med denne loven er det hensiktsmessig å bruke matematisk språk. Vi oversetter dermed loven til en differensiallikning og får

$$\frac{d}{dt}T(t) + \alpha(T(t) - T_{env}) = 0.$$

Der  $T(t)$  er temperaturen til objektet,  $T_{env}$  er temperaturen til omgivelsene og  $\alpha$  er en konstant som uttrykker hvor lett varme ledes inn eller ut av objektet. Merk at dette er en noe idealisert formel, vi antar blant annet at omgivelsene holder en konstant temperatur.

Hvis vi løser opp parenteser og flytter om på noen ledd kan vi se at vi har en inhomogen lineær differensiallikning

$$\frac{d}{dt}T(t) + \alpha T(t) = \alpha T_{env}.$$



### Oppgave 4

Verifiser at for alle konstanter  $C$  er

$$T(t) = T_{env} + Ce^{-\alpha t}$$

en løsning av differensiallikningen over.

Vi skal senere repetere en metode for å løse denne typen differensiallikning, men det holder for nå å bruke innsetting som verifiseringsmetode. Vi setter inn  $T(t) = T_{env} + Ce^{-\alpha t}$  i venstresiden av difflikningen og får

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T_{env} + Ce^{-\alpha t}) + \alpha(T_{env} + Ce^{-\alpha t}) &= -\alpha Ce^{-\alpha t} + \alpha T_{env} + \alpha Ce^{-\alpha t} \\ &= \alpha T_{env} \end{aligned}$$



### Oppgave 5

Vi skal nå se på en melkekartong. En lørdags morgen var Per Haugen noe distre og lot melkekartongen stå fremme på kjøkkenet etter frokost. Da han tok den ut av kjøleskapet var melken  $6^\circ\text{C}$ , og da han etter to timer igjen oppdaget kartongen var temperaturen steget til  $13^\circ\text{C}$ . På kjøkkenet holdt ett aircondition-anlegg temperaturen på komfortable  $20^\circ\text{C}$ .

Bestem verdien til  $\alpha$ .

Her har vi en del informasjon. Først og fremst vet vi at  $T(0) = 6$  og  $T(2) = 13$ . Videre har vi at siden  $T(t) = T_{env} + Ce^{-\alpha t}$  må vi også få

$$6 = T(0) = 20 + Ce^{-\alpha \cdot 0} = 20 + C$$

og

$$13 = T(2) = 20 + Ce^{2\alpha}$$

Disse to likningene gir oss dermed  $C = -14$  og  $\alpha = \frac{1}{2} \ln(2)$ .



## Oppgave 6

Da Per til slutt fikk summet seg til å sette melken inn i kjøleskapet hadde temperaturen økt til  $15^\circ\text{C}$ . Da han en time senere tok seg et glass melk var temperaturen på  $12^\circ\text{C}$ . Hva var temperaturen i kjøleskapet?

Vi lar  $t = 0$  være tidspunktet for når melken ble satt inn igjen i kjøleskapet. Da får vi  $T(0) = 15$  og  $T(1) = 12$ . Videre har vi fortsatt en formel for  $T(t)$  og vi vet at  $\alpha = \frac{1}{2} \ln(2)$ . Dermed får vi

$$15 = T(0) = T_{env} + C$$

og

$$12 = T(1) = T_{env} + Ce^{-\frac{1}{2} \ln(2)} = T_{env} + \frac{C}{\sqrt{2}}$$

Disse likningene gir oss

$$12 = T_{env} + \frac{15 - T_{env}}{\sqrt{2}}$$

som har løsning

$$T_{env} = \frac{12\sqrt{2} - 15}{\sqrt{2} - 1} \approx 4.8$$

## Integrerende faktor

Vi skal nå se hvordan vi kan løse difflikninger på formen

$$\dot{x} + f(t)x = g(t)$$

ved hjelp av integrerende faktor.



### Resultat 1.1.3

La

$$\dot{x} + f(t)x = g(t)$$

være en difflikning hvor  $f$  og  $g$  er kontinuerlige på et interval  $I$ . Vi finner en løsning ved å

1. Finne en antiderivert  $F(t)$  av  $f(t)$ .
2. Gange inn  $e^{F(t)}$  i likningen.

$$e^{F(t)}\dot{x}(t) + e^{F(t)}f(t)x(t) = e^{F(t)}g(t),$$

3. Venstresiden kan nå gjenkjennes som den deriverte av produktet

$$e^{F(t)}x(t),$$

så vi kan skrive om likningen som

$$\frac{d}{dt} \left( e^{F(t)}x(t) \right) = e^{F(t)}g(t).$$

4. Integrerer vi begge sider får vi

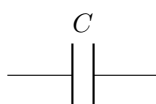
$$e^{F(t)}x(t) = \int e^{F(t)}g(t) dt + C,$$

5. Løser vi med hensyn på  $x(t)$  får vi nå den generelle løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-F(t)} \left( \int e^{F(t)}g(t) dt + C \right) \\ &= e^{-F(t)} \int e^{F(t)}g(t) dt + e^{-F(t)}C \end{aligned} \tag{1.1}$$

## Elektroteknikk

En kondensator

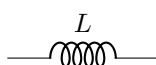


to plater som står inntil hverandre i en krets. Kretsen kan fylle på elektroner på den ene platen og tappe dem ut fra den andre platen, slik at det oppstår en spenning mellom platene. Energi blir ladet opp, og denne kan bli sluppet løs igjen senere; det kommer an på kretsen. Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er kjørt inn i den:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int^t i(s) ds$$

Proporsjonalitetskonstanten  $C$  måles i coulomb per volt, og avhenger av størrelsen på kondensatorplatene, hva de er laget av, hvor langt de står fra hverandre og så videre.

En spole



er en strømledning som er lagt i spiral. Trafoen oppe i gaten er full av disse, og norsk industri hadde vært utenkelig uten spoler. Man bruker dem for eksempel når man vil ha en turbin i et vannkraftverk til å generere elektrisk strøm. Spolen fungerer sånn at når strømmen gjennom spolen endres, oppstår et magnetfelt som skaper en spenning som prøver å motvirke endringen i strømmen, og elementloven er:

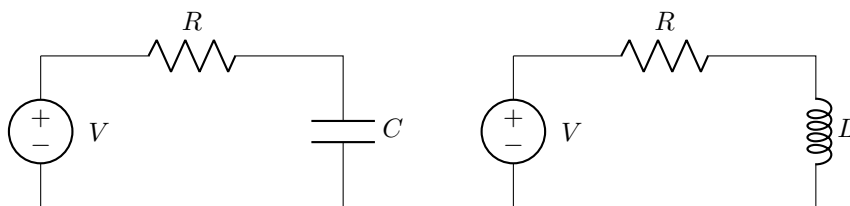
$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

Denne er mer komplisert å forstå enn kondensatoren, og følger av Faradays lov

$$\oint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

som er en av Maxwells fire berømte likninger.

Den helt klart viktigste anvendelsen av differensiallikninger i elektroteknikkens verden, er kanskje RC- og RL-kretser:



### Oppgave 7

Sett opp differensiallikninger for RC- og RL-kretsen.

Mer spesifikt finn differensiallikningene for spenningen over kondensatoren i RC-kretsen, og for strømmen i RL-kretsen.

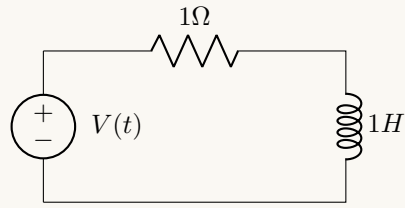
(Hint: bruk Kirchhoffs spenningslov og elementlovene.)

Hvis du fikk til forrige oppgave, vil du se at både RC- og RL-kretsen er styrt av nøyaktig samme differensiallikning som Newtons avkjølingslov og E. Coli, til tross for at virkemåten for spole og kondensator er helt forskjellig.



### Oppgave 8

Finn strømmen i kretsen når  $V(t) = k$ . Det er ingen strøm i kretsen ved  $t = 0$ .



### Oppgave 9

Finn strømmen i kretsen over når  $V(t) = \cos t$ . Det er ingen strøm i kretsen ved  $t = 0$ .