



# 1. Diagonalisering

Betrakt diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Det er relativt enkelt å multiplisere  $D$  med vektorer i  $\mathbb{R}^2$  eller  $\mathbb{C}^2$ . Det er også veldig enkelt å gange  $D$  med seg selv, for eksempel kan  $D^5$  finnes som

$$D^5 = D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-5)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -3125 \end{bmatrix}.$$

Prøver vi å gjøre det samme med en generell kvadratisk matrise  $A$ , blir det mer utfordrende. Vi ser igjen på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},$$

I forrige seksjon fant vi egenverdiene til  $A$ ;  $\lambda_1 = 3$  og  $\lambda_2 = -5$ . De tilhørende egenvektorene var

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Det betyr at vi har

$$A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1 \quad \text{og} \quad A\mathbf{v}_2 = (-5)\mathbf{v}_2.$$

Lar vi  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  være kolonnene i en matrise  $P$ , og  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  være tallene i en diagonalmatrise; altså

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

får vi

$$AP = PD.$$

Vi observerer at  $P$  er inverterbar med invers

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vi kan altså multiplisere begge sidene av  $AP = PD$  med  $P^{-1}$  og få

$$A = PDP^{-1}.$$

Dette gir oss en enkel måte å finne  $A^k$  for alle  $k$  med formelen

$$\begin{aligned} A^k &= \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}^{n \text{ times}} \\ &= PD \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_2} D \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_2} \dots D \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_2} DP^{-1} \\ &= PD^k P^{-1} \end{aligned}$$



### Definisjon

En  $n \times n$ -matrix  $A$  er **diagonaliserbar** hvis det eksisterer en diagonalmatrise  $D$  og en inverterbar matrise  $P$  slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

Vi sier at  $P$  diagonaliserer  $A$ .

Ikke alle matriser er diagonaliserbare så vi må finne en metode for å avgjøre diagonaliserbarhet.



### Resultat 1.0.1

En  $n \times n$ -matrise  $A$  er diagonaliserbar hvis og bare hvis  $A$  har  $n$  lineært uavhengige egenvektorer.

*Bevis.* Her viser vi kun at nok egenvektorer gir diagonaliserbarhet. Anta at  $A$  har  $n$  lineært uavhengige egenvektorer  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  med tilhørende egenverdier  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . For hver egenvektor har vi

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Som over kan vi putte alt dette inn i en matriselikning

$$AP = PD,$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

og

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n].$$

Siden  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n$  er lineært uavhengige er  $n \times n$ -matrisen  $P$  inverterbar. Vi kan altså finne inversmatrisen  $P^{-1}$  og vi har

$$A = PDP^{-1}.$$

Vi konkluderer med at  $A$  er diagonaliserbar. □



## Merknad

Generelt har vi at hvis en  $n \times n$ -matrise har  $n$  ulike egenverdier, er den diagonaliserbar siden hver egenverdi står til minst én egenvektor, og det kan vises at egenvektorer assosiert med ulike egenverdier er lineært uavhengige.



### Eksempel 1.0.1

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har egenverdier

$$\lambda = \pm i$$

med ikke-null vektorer i  $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  som egenvektorer til  $\lambda_1 = i$ , og de ikke-null vektorene i  $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$  som egenvektorer til  $\lambda_2 = -i$ .

Dette betyr at  $A$  er diagonaliserbar som en *kompleks* matrise med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$



### Eksempel 1.0.2

Vi ser nå på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Egenverdiene til  $A$  er 1:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (1 - \lambda)^2.$$

Egenvektorene til 1 er de ikke-null vektorene i nullrommet av

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette er vektorene utspent av  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Vi kan ikke konstruere to lineært uavhengige vektorer fra kun én, så spesifikt ser vi at  $A$  ikke har to lineært uavhengige egenvektorer. Dermed er ikke  $A$  diagonaliserbar.