1.1. Andreordens difflikning

I dag skal vi se på andreordens lineære difflikninger. De er på formen

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t)$$

hvor a_2, a_1 og a_0 kan være funksjoner, men som vi skal fint anta er konstante verdier. La oss også anta at a_2 ikke er null, for ellers er vi tilbake til førsteordens difflikninger. Dermed må vi også gjerne dele likningen på a_2 så vi får følgende fine formel

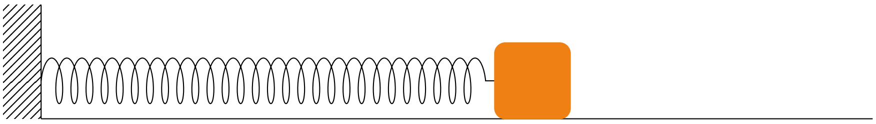
$$\ddot{y} + \frac{a_1}{a_2}\dot{y} + \frac{a_0}{a_2}y = \frac{1}{a_2}f(t).$$

Hvordan kan vi gjøre denne finere? Jo, vi antar at $a_2 = 1$, for som vi nettopp observerte kan vi uansett manipulere den til å bli 1. Altså jobber vi med diffligningen

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t).$$

Masse på fjær

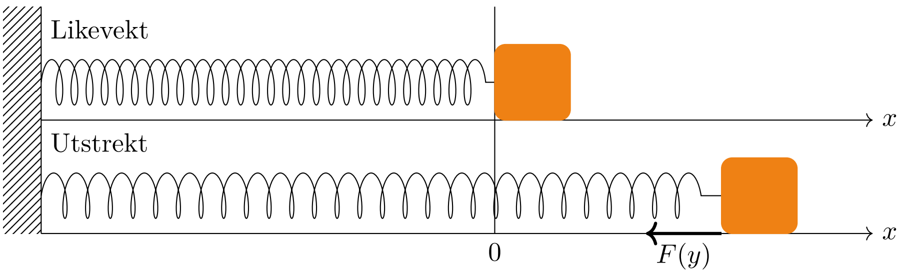
Vi finner oss nå en fin kloss, en fjær, ett friksjonsfritt bord og et rom i vakuum. Vi monterer fjæren til veggen og klossen, og legger klossen på bordet.



Nå ligger klossen i likevekt. Totalt er det ingen krefter som virker på den, og ifølge Newton vil den da ligge i ro. Som anarkistene vi er liker vi ikke status quo, så vi drar klossen rett ut fra veggen langs bordet. Da sier Hookes fjærlov at fjæren vil prøve å dra klossen tilbake til likevekt med en kraft som er proporsjonal med avstanden til likevekt. Skrevet opp som formel er dermed

$$F = -kx$$

kraften som virker på klossen. Her er x avstanden fra likevekt og k en konstant avhengig av stivheten i fjæren.



Oppgave 1

Bruk Newtons andre lov til å sette opp en andreordens difflikning for forflytningen til klossen.

Newtons andre lov sier at den totale kraften på et objekt er lik produktet av massen til objektet og akselerasjonen til objektet.

$$F = ma$$

Husk at akselerasjon er den andrederiverte av forflytning, altså får vi i vårt tilfelle at

$$F = ma = m\ddot{x}.$$

Bordet vi tok med oss er friksjonsfritt og det er ingen luftmotstand i et vakuum, så verken friksjon eller luft virker med noen kraft på klossen. Tyngdekraften kanselleres med normalkraften fra bordet, så totalkraften på klossen er $-kx$. Dermed får vi differensialligningen

$$m\ddot{x} = -kx, \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Oppgave 2

Hva er den generelle løsningen av denne difflikningen?

Enten så husker du hvordan man løser andreordens difflikninger, eller så kan det hende du lot deg inspirere av løsningene vi fant for førsteordensdiffligninger og tippet på noe som

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

Hvis vi tipper $x(t) = Ae^{\lambda t}$ kan vi godt anta A ulik null, ellers er løsningen lite interessant. Vi setter tippet inn i likningen og får

$$\ddot{x} + \tfrac{k}{m}x = 0$$
$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} + \frac{k}{m}e^{\lambda t} = 0$$

Siden $A \neq 0$ og $e^{\lambda t} \neq 0$, kan vi dele vekk dem fra likningen og få

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

som vi kaller det **karakteristiske polynomet** til difflikningen. Dette forteller oss at

$$\lambda = \sqrt{-\tfrac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\tfrac{k}{m}}.$$

Altså er

$$x(t) = Ae^{i\sqrt{k/m}t} \quad \text{og} \quad x(t) = Ae^{-i\sqrt{k/m}t}$$

løsninger av likningen for alle A. Ikke en spesielt pen løsning dog, så la oss se til hva dere lærer i dagens andre kurs og stjele noen formler fra der. Der lærer dere at

$$\cos(\sqrt{k/m}t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\sqrt{k/m}t} + e^{-i\sqrt{k/m}t}\right)$$

og

$$\sin(\sqrt{k/m}t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\sqrt{k/m}t} - e^{-i\sqrt{k/m}t}\right).$$

Ved å sette dette sammen med at summen av to løsninger fortsatt er en løsning får vi at

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

er en løsning av difflikningen for alle A og B. Uten å argumentere for det så påstår jeg faktisk at dette er en generell løsning for likningen.

La meg bemerke et viktig steg i argumentet over litt tydeligere.

Resultat 1.1.1 Superposisjonsprinsippet

La $x_1(t)$ og $x_2(t)$ være to løsninger til difflikningen

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0.$$

Da er

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

også en løsning, for alle verdier a og b.

Oppgave 3

Finn x for klossen hvis initialbetingelsene er $x(0) = 1$ og $\dot{x}(0) = 0$.

Krets

Kirchoffs kretslov sier at spenningsfallet over en lukket sløyfe i en elektrisk krets alltid må være null:

$$\sum_k v_k = 0$$

Dette er også en differensiallikning, men på skolen ble du ikke plaget med reaktive elementer. En spole er er en leder som er lagt i spiral:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor`
og spenningen over spolen er proporsjonal med den deriverte av strømmen:

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) = L\dot{i}(t)$$

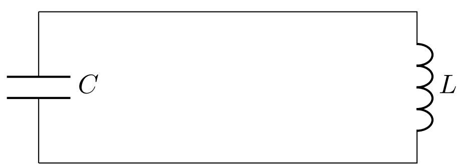
Merk prikken over i'en. Proporsjonalitetskonstanten L kalles spolens induktans, og er, som alt annet innen elektroteknikk, oppfunnet av Oliver Heaviside. [1]

En kondensator er to plater som er fysisk adskilte, men som kan fylles opp med elektroner:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor`
Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er måkt inn på den:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i$$

Proporsjonalitetskonstanten C kalles kapasitansen, og er selvfølgelig også oppfunnet av Heaviside.

Vi ser på følgende krets



Kirchhoffs spenningslov på kretsen gir

$$L\dot{i}(t) + v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i = 0$$

eller

$$\ddot{i} + \frac{1}{LC}i = 0$$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside`

om du foretrekker det, og løsningen er

$$i(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Dette systemet er også en harmonisk oscillator, og matematisk identisk med fjæren og klossen. Om du bare fikk løsningstrajektorien i et plot og ingen informasjon om hva det var for noe, er det ikke mulig å gjette om løsningen kommer fra en spole og kondensator eller en fjær og en kloss.

Oppgave 4

Finn i dersom $i(0) = 1$ og $\dot{i}(0) = 0$.

Løsninger

La oss nå se på løsningene til den generelle andreordenslikningen vi så på i starten.

Dere kan få bruk for følgende likheter i utledningen

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)),$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

og

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Oppgave 5

Finn løsningene til

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

hvis

a) $b^2 - 4c > 0$

b) $b^2 - 4c < 0$

c) $b^2 - 4c = 0$

Hint: Har du funnet én løsning $x(t)$ for c), sjekk om også $t \cdot x(t)$ gir en løsning.

Vi tipper som før på at $x(t) = e^{\lambda t}$ er en løsning. Dette gir oss likningen

$$\lambda^2 + \lambda b + c = 0$$

som løses ved ABC-formelen ved

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Hvis $b^2 - 4c > 0$ får vi dermed to ulike reelle røtter λ_1 og λ_2. Dermed er

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

en løsning til difflikningen ved superposisjonsprinsippet. Dette er faktisk den generelle løsningen i det tilfellet.

Hvis $b^2 - 4c < 0$ får vi to komplekse løsninger $\lambda = \delta \pm i\omega_0$, hvor $\delta = -\frac{b}{2}$ og $\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$. Fra superposisjonsprinsippet og likhetene over får vi at

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{2}e^{(\delta + i\omega_0)t} + \tfrac{1}{2}e^{(\delta - i\omega_0)t} \\ &= e^{\delta t}\frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \\ &= e^{\delta t}\cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \tfrac{1}{2}e^{(\delta+i\omega_0)t} - \tfrac{1}{2}e^{(\delta-i\omega_0)t} \\ &= e^{\delta t}\frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \\ &= e^{\delta t}\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

er løsninger av diffliknigen, og igjen ved superposisjonsprinsippet er

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) = e^{\delta t}(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))$$

en løsning for alle A og B. Faktisk er det en generell løsning.

Spørsmål

Hvorfor ønsket vi ikke løsningen

$$x(t) = Ae^{(\delta+i\omega_0)t} + Be^{(\delta-i\omega_0)t}?$$

Jo, fordi problemene vi studerer med difflikninger ofte krever reelle løsninger og denne er kompleks.

Hvis $b^2 - 4c = 0$ får vi en dobbelrot $\lambda = -\frac{b}{2}$. Altså er $x_1(t) = e^{-b/2t}$ en løsning. Du kan selv sjekke at vi også vil få $x_2(t) = te^{-b/2t}$ som løsning. Dermed ender vi opp med generell løsning

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) = e^{-b/2t}(A + Bt).$$

Disse løsningene er vi så stolte av at vi samler dem i en fin boks.

Resultat 1.1.2

Den generelle (reelle) løsningen av

$$y'' + a_1y' + a_0 = 0$$

avhenger av røttene til det **karakteristiske polynomet**

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

Den generelle (reelle) løsningen er

$$y(t) = \begin{cases} c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} & \text{hvis det er to reelle røtter } \lambda_1 \text{ og } \lambda_2. \\ c_1e^{\lambda_1 t} + c_2te^{\lambda_1 t} & \text{hvis det er en dobbel rot } \lambda_1. \\ e^{\delta t}[c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)] & \text{hvis det er to komplekse røtter } \delta \pm i\omega_0. \end{cases}$$

Initialbetingelser

Vi ser på den generelle løsningen over at det alltid er to ukjente. Dermed må vi ha to initialbetingelser for å kunne bestemme en unik løsning.

Eksempel 1.1.1

Løs initialbetingelsesproblemet

$$y'' + 0.4y' + 9.04y = 0$$

med betingelsene

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$$

$$\lambda = \frac{-0.4 \pm \sqrt{0.16 - 36.16}}{2} = \begin{cases} -0.2 + 3i \\ -0.2 - 3i \end{cases}$$

Altså, $\delta = -0.2$ and $\omega_0 = 3$, så den generelle løsningen er

$$y(t) = e^{-0.2t}[c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)]$$

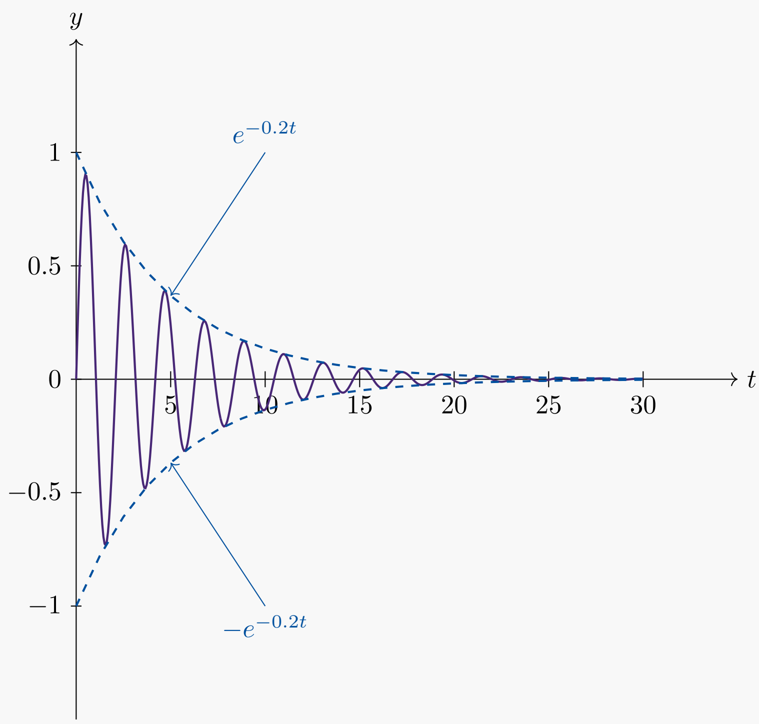
Vi kan se at kravet $y(0) = 0$ fører til at $c_1 = 0$ siden $\cos(0) = 1$. For å finne c_2 må vi derivere uttrykket

$$y'(t) = c_2[-0.2e^{-0.2t} \sin(3t) + 2e^{-0.2t} \cos(3t)].$$

Setter vi $t = 0$ og bruker det andre kravet får vi $y'(0) = 3c_2 = 3$ og $c_2 = 1$. Løsningen er derfor

$$e^{-0.2t} \sin(3t).$$

$$y(t) = 3e^{-0.5t} - 2te^{-0.5t}$$



Eksempel 1.1.2

Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 0.2y' + 16.01y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.1$$

$$\lambda = \frac{0.2 \pm \sqrt{0.04 - 4 \cdot 16.01}}{2} = \begin{cases} 0.1 + 4i \\ 0.1 - 4i \end{cases}$$

Så $\delta = 0.1$ og $\omega_0 = 4$, og den generelle løsningen er

$$y(t) = e^{0.1t}[c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)]$$

Fra kravet $y(0) = 1$ følger det at $c_1 = 0$, så vi har

$$y(t) = e^{0.1t}[\cos(4t) + c_2 \sin(4t)]$$

og for å finne c_2 deriverer vi:

$$y'(t) = e^{0.1t}[(4c_2 + 0.1)\cos(4t) + (0.1c_2 - 4)\sin(t)].$$

Når vi setter $t = 0$ får vi

$$y'(0) = 4c_2 + 0.1 = 4.1$$

så $c_2 = 1$ og løsningen er

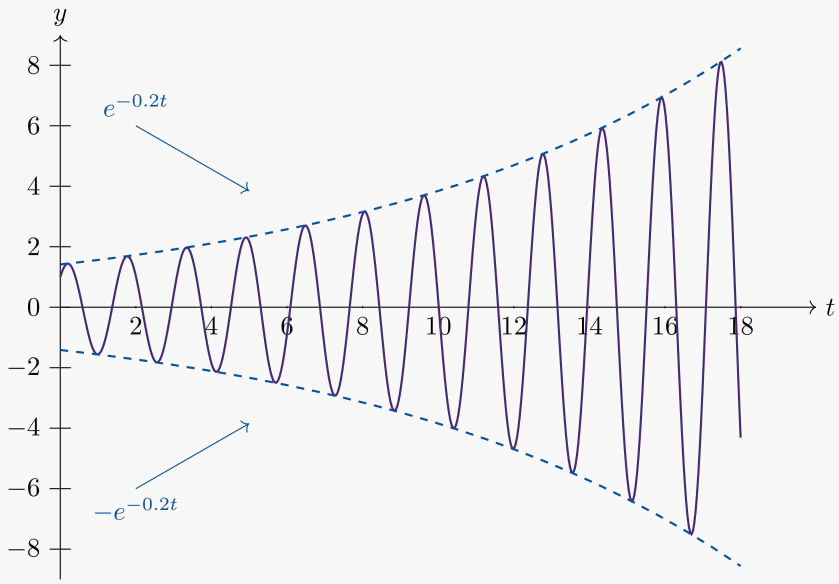
$$y(t) = e^{0.1t}[\cos(4t) + \sin(4t)]$$

For lettere analyse skriver vi om dette uttrykket til formen

$$\cos(4t) + \sin(4t) = A\cos(4t - \phi).$$

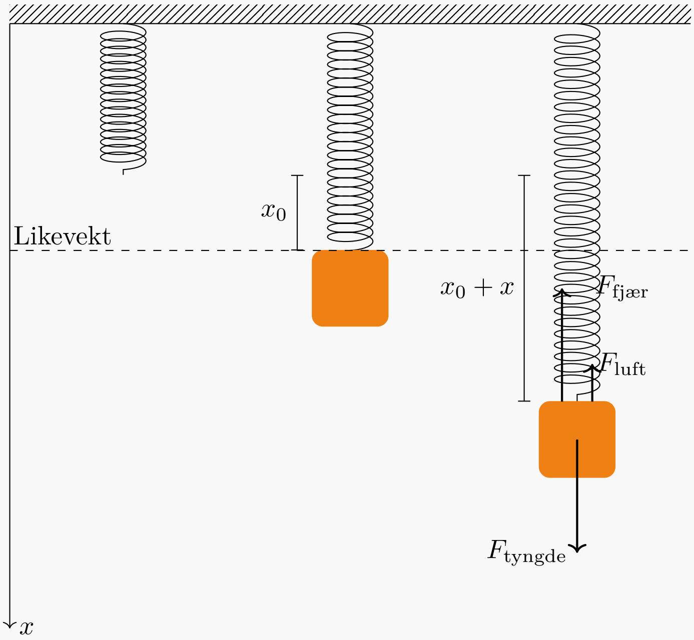
I forkunnskapsnotatet så vi at amplituden A er gitt ved $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, og fasen ϕ er gitt ved $\arctan(1/1) = \pi/4$, dermed får vi

$$y(t) = \sqrt{2}e^{0.1t}\cos(4t - \pi/4)$$



Eksempel 1.1.3 Frie svingninger

Vi tar nå klossen og fjæren ut av det friksjonsfrie og lufttomme rommet vårt og fester fjæren i taket. Når vi fester klossen i fjæren så strekker den seg noe ned på grunn av tyngdekraften. Lengden den strekker seg kaller vi x_0. Nå drar vi klossen litt ned før vi slipper det. La x være utslaget fra likevekt. Vi ønsker å finne x som en funksjon av t.



Vi definerer positiv retning til å være nedover. Totalt har vi tre krefter som virker på klossen. Tyngdekraften virker i positiv retning; $F_{\text{tyngde}} = mg$, hvor m er massen til klossen og $g \approx 9.8$ er gravitasjonskonstanten. Fjærkraften er proporsjonal og motsatt rettet av forlengelsen; $F_{\text{fjær}} = -k(x + x_0)$. Luftmotstanden som er proporsjonal[2] med og motsatt rettet av farten; $F_{\text{luft}} = -lv$.

Newtons andre lov gir oss dermed differensiallikningen

$$ma = mg - k(x + x_0) - lv$$

I likevektsposisjon vil klossen forholde seg i ro, og dermed ikke ha noen akselerasjon, dermed får vi at

$$0 = mg - kx_0$$

og likningen forenkles til

$$ma = -kx - lv$$

eller

$$\ddot{x} + \tfrac{l}{m}\dot{x} + \tfrac{k}{m}x = 0$$

Det karakteristiske polynomet til likningen har røtter gitt ved

$$\lambda = \frac{-l/m \pm \sqrt{(l/m)^2 - 4(k/m)}}{2} = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - 4km}}{2m}$$

Vi har fire muligheter for løsningene:

- Harmonisk svinging; $l = 0$.
- Dempet svinging; $l < 2\sqrt{km}$.
- Kritisk dempet svinging; $l = 2\sqrt{km}$.
- Overkritisk dempet svinging; $l > 2\sqrt{km}$.

Oppgave 1. Skriv opp den generelle løsningen for hver av tilfellene over. Velg verdier som tilfredstiller kravene og plott løsningskurver i Geogebra.

[2] for tilstrekkelig lave hastigheter