Uke 47 - Øving 12

09 November 2022 19:25

1. Skissér faseplottet til systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$y' = Ay'$, $A_{2\times 2}$

3 tilfeller avh. av egenverdiene til A

↳ Egenverdiene er røttene til det kar. pol. $\det(A - \lambda I) = 0$

1. To distinkte reelle røtter
   $\lambda_1 \neq \lambda_2$
   $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
2. To distinkte, komplekse røtter
   $\lambda_1 \neq \lambda_2$
   $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
3. Én reell rot
   $\lambda \in \mathbb{R}$

$c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$

er generell løsning

Fasediagram

λ	$e^{\lambda t}$	$\vec{v}e^{\lambda t}$
>0	øker	bort fra origo
$=0$	konstant	står i ro
<0	minker	mot origo

$\lambda < 0$ dominerer når $t \ll 0$

$\lambda > 0$ —— " —— $t \gg 0$

TEOREM

$\alpha + i\beta \neq 0$ kompleks egenverdi for A, $\vec{v}$ tilh. egenvektor.

Da danner

$\vec{y}_1(t) = e^{\alpha t}(Re(\vec{v})\cos(\beta t) - Im(\vec{v})\sin(\beta t))$

og

$\vec{y}_2(t) = e^{\alpha t}(Re(\vec{v})\sin(\beta t) + Im(\vec{v})\cos(\beta t))$

en basis for reelt løsningsrom til

$\vec{y}' = A\vec{y}$

Fasediagram

cos og sin ⇒ sirkulær bevegelse

α	bevegelse
>0	spiral bort fra origo
$=0$	sirkulær
<0	spiral mot origo

Hvordan tegne fasediagram

a) Tegn 2 lin. uavh. egenvektor i koord. sys.

b) Avgjør bevegelsen til løsningen

c) Tegn kurver som beveger seg i hht. dette.

$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

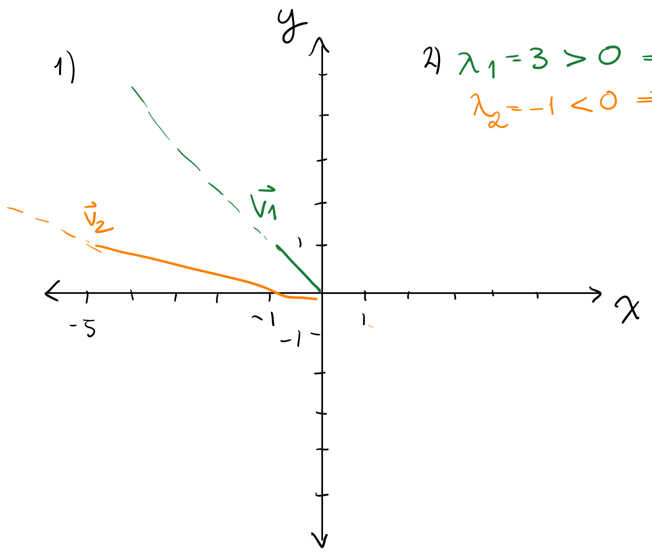
$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ egenvektor for $\lambda_1 = 3$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ egenvektor for $\lambda_2 = -1$

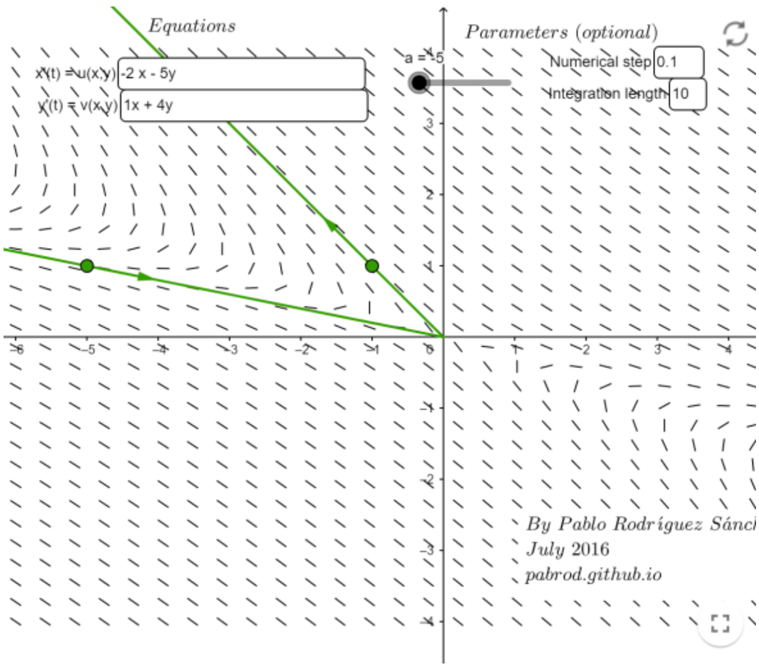
y λt

1)



2) $\lambda_1 = 3 > 0 \Rightarrow e^{\lambda_1 t}$ øker $\Rightarrow$ bort fra origo

$\lambda_2 = -1 < 0 \Rightarrow e^{\lambda_2 t}$ minker $\Rightarrow$ mot origo



b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

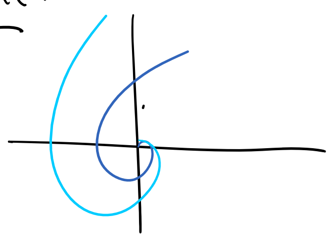
$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \overset{\alpha}{-1} + i\overset{\beta}{\sqrt{2}} \\ \lambda_2 = -1 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix}$$

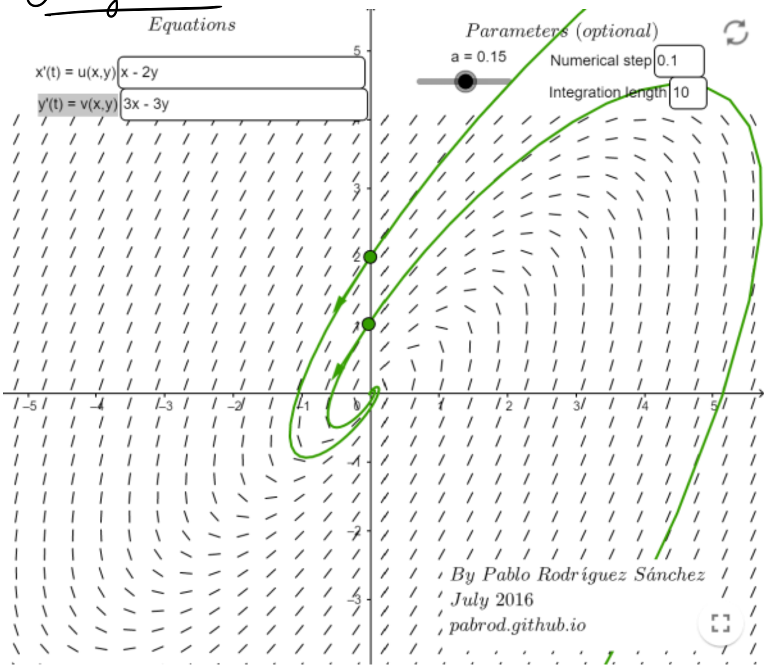
$\alpha = -1 \Rightarrow$ spiral ut fra origo

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix}$$

Noe sånt:



Geogebra



2. Finn generell løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

$$A\vec{y} = \vec{y}\,'$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

TEOREM 138

$A_{n\times n}$ diagonaliserbar
$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n lin. uavh. egenvektor
m. egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
Da er

$$\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en basis for løsn.rommet til $\vec{y}' = A\vec{y}$
Dvs

$$c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en generell løsning av $\vec{y}' = A\vec{y}$

Plan:
1. Finne egenverdier til A
2. Finne tilh. egenvektor til A

③ Bruke Thm 13.18 til å skrive generell løsn..

① $\det(A-\lambda I)=0$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} -6-\lambda & -11 & 16 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ -4 & -5 & 10-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (-6-\lambda)\cdot\left[(5-\lambda)(10-\lambda)-4(-5)\right]$$

$$-(-11)\cdot\left[2(10-\lambda)-4\cdot(-4)\right]$$

$$+16\left[2\cdot(-5)-(5-\lambda)(-4)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3-9\lambda^2+26\lambda-24=0$$

Polynomdivisjon:

Prøver m. $\lambda_1 = 2$ (litt prøving og feiling først)

$$(\lambda^3-9\lambda^2+26\lambda-24):(\lambda-2) = \underline{\lambda^2-7\lambda+12}$$

$$-\ \ \lambda^3 \mp 2\lambda^2$$

$$-7\lambda^2+26\lambda$$

$$\pm 7\lambda^2 \mp 14\lambda$$

$$12\lambda-24$$

$$-\ \ 12\lambda \mp 24$$

$$0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2$$

abc-formel på $\lambda^2-7\lambda+12=0$

$$\lambda = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1} = \frac{7\pm1}{2} = \begin{cases}\lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 3\end{cases}$$

② Finne egenvektorer v. å løse

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ for $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 3$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 11 & 16 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -8 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{aligned} v_1 - 2v_3 &= 0 \\ v_2 &= 0 \\ v_3 &= s \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot s \quad \xRightarrow{s=1} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ er egenvektor for } \lambda_1 = 2$$

Tilsvarende finner vi at $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\lambda_2 = 4$

og at $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\lambda_3 = 3$

Generell løsning er gitt ved:

$$y(t) = c_1 \vec{v} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{u} e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{w} e^{\lambda_3 t}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

3. Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Igjen har vi

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

Vi vil løse IVP $A\vec{y} = \vec{y}'$

m. $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

fra forrige oppg.

Husk: $y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

Vi skal nå finne c_1, c_2, c_3

Det er gitt at $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\vec{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2\cdot 0} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4\cdot 0} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3\cdot 0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_1(2,0,1) + c_2(7,-2,3) + c_3(3,-1,1) = (1,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2c_1 + 7c_2 + 3c_3 &= 1 \\ -2c_2 - c_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 1, \; c_2 = -1, \; c_3 = 2$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

8. Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

$$A\vec{y} = \vec{y}' \qquad \text{m.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Initialverdi: $y(\vec{0}) = \vec{y}_0$.

Mål: Ønsker å vise at $A\vec{y} = \vec{y}'$ m. $y(\vec{0}) = \vec{y}_0$ har en entydig løsning.

Kan anta tredimensjonalt løsningsrom

V. samme fremgangsmetode som oppg. 2a) kan vi finne at den generelle løsningen er

$$\vec{y}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}e^{-4t}$$

(Vi må vise altså at det finnes et entydig valg av koeffisienter c_1, c_2, c_3 s.a. $A\vec{y} = \vec{y}'$ og $y(\vec{0}) = \vec{y}_0$)

$$\vec{y}(0) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2\cdot 0} + c_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}e^{2\cdot 0} + c_3\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}e^{-4\cdot 0} = \vec{y}_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=B} \vec{c} = \vec{y}_0 \qquad \text{hvor } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Teorem 4.20

$A_{n\times n}$, $\vec{b}_{n\times 1}$ vektor

A inverterbar $\Rightarrow$ $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning

dette kan vi sjekke

Siden $\det(B) \neq \vec{0} \Rightarrow B$ inverterbar $\overset{\text{Thm } 4.20}{\Longrightarrow}$ $\vec{c}$ (løsningen) er entydig bestemt.

Eksamen Vår 2017

Oppgave 6 La $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

b) Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

og finn $\mathbf{x}(5)$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Mål: Finne $\lambda, \vec{v}$ s.a. $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$

1 Finne egenverdier

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(-3-\lambda)(-4-\lambda) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases}$$

2 Finne egenvektorer

$\lambda_1 = -1$ $\quad (A + I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = \frac{3}{2} v_2 \\ v_2 = s \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

For $s = 2$ får vi egenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = -6}$ $\quad (A + 6I)\vec{u} = \vec{0}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = -u_2 \\ u_2 = t \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

For $t = 1$ får vi egenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Løs IVP $\quad \vec{x}\,'(t) = A\vec{x} \qquad \vec{x}\,'(0) = \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Generell løsning:

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{u}$$

$$= c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Initialbetingelsen $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \end{pmatrix}$ gir:

$$\vec{x}(0) = c_1 e^{-0} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6 \cdot 0} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3c_1 - c_2 &= 150 \\ 2c_1 + c_2 &= 50 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 150 \\ 2 & 1 & 50 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & -30 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 40 \\ c_2 &= -30 \end{aligned}$$

Løsningen på IVP blir:

$$\vec{x}(t) = 40 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 30 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Høst 2017

Oppgave 5 La $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Finn løsningen av initialverdiproblemet

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) <u>MÅL</u>: Løse IVP

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vet at generell løsning er

$$\vec{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\vec{v}_3$$

hvor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ er egenverdien til henholdsvis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

$10^{-9} = n$

<u>Egenverdier:</u>

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = -(\lambda+2)(\lambda-4)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

<u>Egenvektorer</u>

$\boxed{\lambda_1 = -2}$ $\quad (A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = v_2 \\ v_2 = s, \ s \in \mathbb{R} \\ v_3 = 0 \end{array}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s \qquad s = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 4}$ $\quad (A - 4I)\vec{u} = \vec{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = -v_2 \\ v_2 = t, \ t \in \mathbb{R} \\ v_3 = r, \ r \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$t = 0, \ r = 1 \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t = 1, \ r = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Generell løsning:</u>

$$\vec{y}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_1 e^{\lambda_2 t} + c_3 u_2 e^{t \lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow \vec{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Må finne c_1, c_2, c_3. Kan bruke

Initial betingelse: $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 \qquad - c_3 = 2 \\ c_1 \qquad + c_3 = 0 \\ \qquad c_2 \qquad = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Høst 2018

Oppgave 3 Finn generell løsning av systemet

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

og skisser fasediagrammet.

$$\begin{array}{l} y_1' = 7y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}}_{\vec{u}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\vec{y}}$$

MÅL: ① Finne generell løsn. $\vec{u}' = A \cdot \vec{y}$

② Skissere fasediagram

① Husker at

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{v}\, e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{u}\, e^{\lambda_2 t}$$ er generell løsn.

Plan:

1) Finne egenverdier λ_1 og λ_2 til A

2) Finne egenvektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$ tilhørende λ_1 og λ_2

Egenverdier:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = (7-\lambda)(2-\lambda) - 2\cdot 2 = \lambda^2 - 9\lambda + 10 = (\lambda-6)(\lambda-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{for hver } \lambda$$

$\boxed{\lambda_1 = 3}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2} v_2 \\ v_2 = s \end{array} \qquad s \in \mathbb{R}$$

$s = 2$ gir egenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = 6}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} u_1 = 2u_2 \\ u_2 = t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$s = 1$ gir egenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Generell løsning blir da

$$\vec{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

② Fasediagram

$e^{\lambda_1 t}$ dør $\Rightarrow$ $\vec{v}\, e^{\lambda_1 t}$ går bort fra origo

$\lambda_1 = 3 > 0 \Rightarrow e^{\lambda_1 t}$ vokser $\Rightarrow \vec{v}\, e^{\lambda_1 t}$ går bort fra origo

$\lambda_2 = 6 > 0 \Rightarrow e^{\lambda_2 t}$ vokser $\Rightarrow \vec{u}\, e^{\lambda_2 t}$ går bort fra origo