onsdag 18. nov. 2020

$V \xrightarrow{T} W$ lin. transformasjon

T hjelper oss til å sammenligne V og W

T injektiv $\iff$ $T(\underline{u}) = T(\underline{v})$ impliserer $\underline{u} = \underline{v}$ i V

T surjektiv $\iff$ for alle w i W finnes det minst en v i V slik at $T(v) = w$.

- T injektiv impliserer · $\dim V \leq \dim W$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lineært uavhengige i V

$\implies T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)$ er også lin. uavhengige i W

- T surjektiv impliserer $\dim V \geq \dim W$

$V = \text{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \implies W = \text{Span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$.

- Hvordan finner vi ut om T er injektiv og/eller surjektiv?

Hovedmetode: · Finn standardmatrisen $\overset{A}{\vee}$ til T (mhp basiser for V og W) $T(\underline{v_1}), \dots, T(\underline{v_n})$

- T er injektiv $\iff$ alle kolonner i A er pivotkolonner
- T er surjektiv $\iff$ alle rader i A har et pivotelement

<u>Eksempel</u>: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$ $\boxed{\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^4}$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ 0 & -14 & 3 \\ 0 & 3 & -16 \\ 0 & 3 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ 0 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & -215 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- alle kolonner har pivotelementer $\Rightarrow$ T er injektiv
- kun 3 rader har pivotelementer $\Rightarrow$ T er <u>ikke</u> surjektiv

- <u>Eksempel</u>: $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, P_v projeksjon på vektoren $\underline{v}$

$\boxed{P_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3}$

- standardmatrisen $[P_v] = [P_v(\underline{e_1}) \;\; P_v(\underline{e_2}) \;\; P_v(\underline{e_3})]$

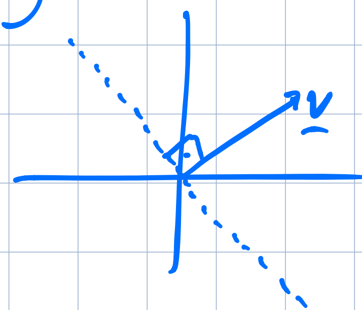
$$P_v(\underline{e_1}) = \frac{\underline{e_1} \cdot \underline{v}}{\underline{v} \cdot \underline{v}} \cdot \underline{v} = \frac{1}{3} \cdot \underline{v} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots$$

$$[P_v] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\dim \operatorname{Ker} P_v = \dim \operatorname{Null} [P_v] = 2$$

$$\dim \operatorname{Im} P_v = \dim \operatorname{Col} [P_v] = 1$$



Sammendrag

Regnemetoder:

- regne med komplekse tall
- løse lineære ligningssystemer

  teknikk: $\boxed{\text{Gauss-eliminasjon}}$

  øve, øve, øve, ...
- beregne determinanter

  2x2, 3x3, ...
- projeksjon

Konsepter:

- lineær uavhengighet

- det lineære spennet
- basiser og koordinater
- vektorrom og lineærtransformasjoner
- egenverdier og egenvektorer

· diagonalisering

masse problemstillinger
er egentlig egenverdiproblemer

Anvendelser:
· Differensiallikninger
· Markovkjeder
· minste kvadraters metode, især lineær regresjon

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

$$P = [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n]$$

$$V \xrightarrow{T} W$$

$$\text{Ker}\,T = \{\underline{v} \text{ i } V \text{ slik at } T(\underline{v}) = \underline{0} \text{ i } W\}$$

$$\boxed{T \text{ injektiv} \iff \text{Ker}\,T = \{\underline{0}\}}$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$$

$$v \longmapsto A \cdot v$$

$\{\underline{v} \text{ i } V \text{ slik at } A \cdot \underline{v} = \underline{0}\} = \text{Null}\, A = \text{Ker}\, A$

$\text{Im}\, T = \{\underline{w} \text{ i } W \text{ slik at det finnes minst en } \underline{v} \text{ i } V \text{ med } T(\underline{v}) = \underline{w}\}$

$T \text{ er surjektiv} \iff \text{Im}\, T = W \qquad V \xrightarrow{T} W$

„Ker T og Im T beskriver T fullstendig."

$\dim V = \dim \text{Ker}\, T + \dim \text{Im}\, T$