10 Komplekse tall

Den imaginære enheten

Generelt er det slik at en polynomlikning

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

ikke nødvendigvis har n løsninger. For eksempel har likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

ingen reell løsning. Men hva skjer om vi prøver å løse den med annengradsformelen? Vi får

$$x = \frac{\sqrt{-4}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2\sqrt{-1}}{2} = \sqrt{-1}.$$

Vi gir dette 'tallet' en spesiell plass i våre hjerter ved å donere en bokstav

$$i = \sqrt{-1},$$

og døpe det *den imaginære enheten*. Vi forutsetter at den imaginære enheten oppfører seg som en vanlig kvadratrot

$$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1.$$

Dersom vi forutsetter at i ellers oppfører seg som vanlige tall, kan vi skrive kvadratroten av negative tall på en pen måte:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(-1)} = 2i.$$

Løser vi likningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

får vi

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

og dette inspirerer oss til å definere *komplekse tall* som

$$z = a + bi.$$

Her er a og b reelle tall. De kalles henholdsvis *realdelen* og *imaginærdelen* til z, og skrives gjerne Re z og Im z. Mengden av alle komplekse tall kalles $\mathbb{C}$. Dersom $b = 0$, er z reell, og vi ser at de reelle tallene er inneholdt i de komplekse, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Operasjoner på komplekse tall

La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$. De kan adderes

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i,$$

subtraheres

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i,$$

og ganges

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i = -7 + 22i. \end{aligned}$$

De kan også deles

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{22}{41} - \frac{2}{41}i. \end{aligned}$$

Hva skjedde her? La $z = a + bi$. Vi ganget oppe og nede med 'z konjugert'

$$\overline{z} = a - bi.$$

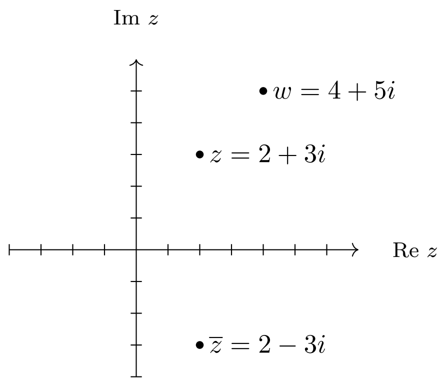
Merk at $z\overline{z}$ blir et reelt tall.

Det komplekse planet

Et komplekst tall har en viss ytre likhet med vektorer i $\mathbb{R}^2$. Hvis komponentene til $\mathbf{x}$ er x_1 og x_2 og enhetsvektorer i koordinatretningene er $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$, skriver vi gjerne

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

På lignende vis kan vi tenke at realdelen a og imaginærdelen b er komponenter i en vektor, og avmerke z i *det komplekse planet*.



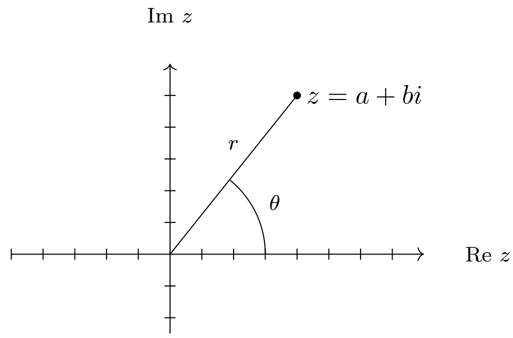
Det komplekse planet

Nå tenker du sikkert at det er på sin plass å sjekke om vektorromsaksiomene holder for de komplekse tallene. Til tross for den ytre likheten med $\mathbb{R}^2$, er ikke dette en spesielt naturlig ting å gjøre, men mange av de vanlige geometriske operasjonene man gjør på vektorer i $\mathbb{R}^2$, fungerer fint på komplekse tall. Mer om dette til slutt.

Polar form

La r være avstanden fra z til origo i det komplekse planet, og la θ være vinkelen z gjør med den reelle aksen. Noen enkle geometriske betraktninger gir oss at

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} z = r\cos\theta \\ b &= \operatorname{Im} z = r\sin\theta \end{aligned}$$



Polare koordinater

Formlene over gir a og b som funksjon av r og θ. Litt mer enkel trigonometri gir den andre veien

$$r = a^2 + b^2$$
$$\theta = \begin{cases} \tan \frac{b}{a} & \text{for } a > 0 \\ \tan \frac{b}{a} + \pi & \text{for } a < 0 \end{cases}$$

Formelen for θ må deles opp i to tilfeller siden

$$\frac{b}{a} = \frac{-b}{-a} \quad \text{og} \quad \frac{-b}{a} = \frac{b}{-a}.$$

Tangensfunksjonen ser ikke forskjell på disse, og skjønner derfor ikke av seg selv om z ligger til høyre eller venstre for den imaginære aksen. Vi skriver også $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = z\bar{z}$ for avstanden fra z til origo. Dette tallet kalles gjerne absoluttverdi eller modulus til z. Vinkelen θ kalles argumentet til z.

Eulers formel

Fra envariabel kalkulus husker du kanskje de tre taylorrekkene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dersom vi skriver

$$\cos x = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

og

$$i \sin x = ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og legger disse sammen, får vi

$$\cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix}.$$

Dette er kun en symbolsk manipulasjon, vi vet strengt tatt ikke hva som skjer med konvergensen til en taylorrekke når du ganger den med i, men det er allikevel en plausibel hypotese at det er går fint å definere

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

som kalles *Eulers formel*. Vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen er lette å utlede herfra. Tar vi Eulers formel for god fisk, kan vi skrive komplekse tall veldig kompakt på polar form:

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Hvis vi substituerer nx for x i Eulers formel, får vi de Moivres formel

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

Eksempel 10.1. Eulers formel gir at $e^{\pi/2i} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{3\pi/2i} = -i$ og $e^{2\pi} = 1$. △

Røtter av komplekse tall

Hvis du plukker opp en tilfeldig bok i tallteori eller kompleks analyse, er det bevist følgende teorem et eller annet sted. Teoremet heter algebraens fundamentalteorem.

Teorem 10.2. *En polynomlikning*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

har n komplekse løsninger.

Beviset er litt for hardt for dette kurset, men et spesialtilfelle av teoremet kan vi analysere med det vi kjenner til så langt, nemlig komplekse n-te røtter. Dette er løsninger av polynomlikningen

$$z^n = a$$

for et vilkårlig komplekst tall a. Vi skal se med egne øyne at denne likningen alltid har n løsninger. Vi begynner med å skrive a på polar form med valgfritt antall omdreininger rundt origo

$$a = re^{i\theta} = re^{i\theta + 2m\pi}.$$

Dersom vi skriver

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = (re^{i\theta+2m\pi})^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n + 2m\pi/n},$$

ser vi at det nå finnes n potensielle verdier for $\sqrt[n]{a}$, alle sammen gyldige løsninger av $z^n = a$. Hvis du velger $0 \leq m \leq n-1$ får du ut alle sammen.

Eksempel 10.3. Vi finner alle løsninger av ligningen

$$z^5 = -1.$$

Siden

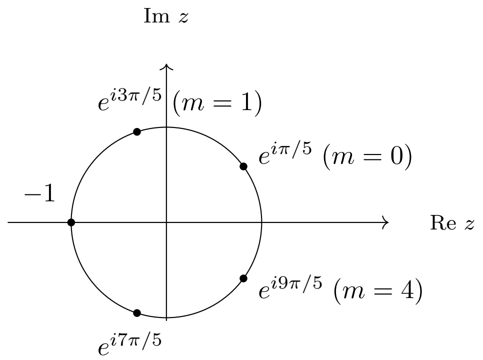
$$-1 = e^{i\pi + 2m\pi},$$

får vi at

$$\sqrt[5]{-1} = e^{i\pi/5 + 2m\pi/5},$$

og for $0 \leq m \leq 4$ spyttes ut

$$\sqrt[5]{-1} = e^{i\pi/5},\ e^{i3\pi/5},\ e^{i5\pi/5} = -1,\ e^{i7\pi/5} \text{ og } e^{i9\pi/5}.$$



Femterøttene til -1

Merk hvordan røttene sprer seg jevnt ut på en sirkel om origo. Merk også at om vi lar $m > 4$ eller $m < 0$, får vi røtter som allerede er listet opp. $\triangle$

Går alt dette greit?

Dette har vært et litt 'kjapt' kapittel. Vi har jo ikke vist noe som helst, bare definert komplekse tall, sagt at $\sqrt{-1}$ oppfører seg som tallene vi kjenner fra før, og slengt ut en masse regneregler uten å argumentere for at dette går greit, eller at det i det hele tatt finnes et tallsystem der likningen

$$x^2 + 1$$

har en løsning.

Konstruksjonen av de reelle tallene $\mathbb{R}$ fra de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$ er komplisert nok til at selv matematikkstudenter ikke blir plaget nevneverdig med det. Den formelle konstruksjonen av $\mathbb{C}$ fra $\mathbb{R}$ er ikke på langt nær så komplisert, men man trenger fremdeles noen konsepter som ligger noe utenfor det vi kan gjøre i dette kurset.

De reelle tallene er et eksempel på en *ordnet* kropp med addisjon og multiplikasjon. Det at de er ordnet, betyr at man alltid kan avgjøre hvilket av to reelle tall som er størst, og kropp betyr at de tilfredsstiller noen aksiomer som er til forveksling like vektorromsaksiomene, og noen andre aksiomer i tillegg. De komplekse tallene er et eksempel på en kropp som ikke er ordnet, siden man ikke kan si om et komplekst tall er større enn et annet, akkurat som vi ikke i $\mathbb{R}^2$ kan si at en vektor er større enn en annen. (Du kan si at en vektor er lengre enn en annen, men det er ikke noen ordning, for to forskjellige vektorer kan være like lange. To reelle tall er like store kun dersom de er identiske.)

Siden det er en ytre likhet mellom $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}^2$, kan det være fristende å sjekke vektorromsaksiomene for å få bekreftelse på at $\mathbb{C}$ er et vektorrom. Dette går helt fint, $\mathbb{C}$ er forsåvidt et vektorrom, men det er ikke spesielt hensiktsmessig å se på det akkurat slik, for vi kan klare litt bedre. I neste kapittel skal vi se hvordan.

Oppgaver

Finn z, der

$$z^2 - z + 5 = 0$$

$$z^3 = 2i$$

$$z^4 = 2$$

$$z^5 = 2 + 2i$$

Beregn $(1+2i)^3$, $\frac{5}{-3+4i}$ og $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$.

Skriv $(1+2i)^3$, $\frac{5}{-3+4i}$ og $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$ på polar form.

Merk av $(1+2i)^3$, $\frac{5}{-3+4i}$ og $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$ i det komplekse planet.

Vis at $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$. Hint: de Moivres formel.