NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Gabriele Bruell[a], William Sanders[b]

Tlf:

Eksamensdato: 02. desember 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Enkel kalkulator (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX ,Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, eller Hewlett Packard HP30S), Rottmann: Matematisk formelsamling.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
sort/hvit ☒ **farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐

Dato Sign

Oppgave 1

a) Skriv det komplekse tallet $z = -1 + i\sqrt{3}$ på polarform.

b) Vis at $z = -1 + i\sqrt{3}$ er en sjetterot av 64.

c) Skisser alle løsninger av $z^6 = 64$ i det komplekse planet.

Oppgave 2 La $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & 6 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

a) Vis at $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.

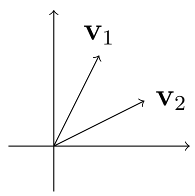
b) Skriv $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon av kolonnene til M.

c) Finn en basis for hver av de følgende: $\operatorname{Col} M$, $\operatorname{Row} M$ og $\operatorname{Nul} M$.

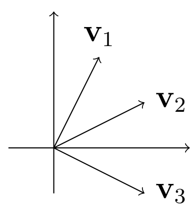
d) Finn determinanten til M.
Hint: Det finnes en kort løsning. Utvidelse med kofaktorer er derfor ikke nødvendig.

Oppgave 3 De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.

a) Er vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Utgjør de en basis for $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.



b) Er vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Utgjør de en basis for $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.



Oppgave 4 Ligningen for en udempet tvungen harmonisk bevegelse er gitt ved:

$$y''(t) + y(t) = \cos(t-2).$$

a) Finn den generelle løsningen til den homogene ligningen.

b) Finn den generelle løsningen til den inhomogene ligningen.

Oppgave 5 La $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Finn løsningen av initialverdiproblemet

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Vis at løsningen av initialverdiproblemet

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

er entydig/unik.
Hint: Entydig løsning betyr at for enhver gitt initialverdi $\mathbf{y}_0$ eksisterer det **kun en** løsning $\mathbf{y}$.

c) Finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$. Gi P^{-1} eksplisitt.
Hint: A er symmetrisk.

Oppgave 6 La $W = \operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, hvor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Finn en ortonormal basis for W.

Oppgave 7 La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og la $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være avbildningen

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u},$$

som er den ortogonale projeksjonen på underrommet utspent av $\mathbf{u}$.

a) Skriv ned definisjonen av en lineær transformasjon.

b) Vis at T er en lineær transformasjon.
Hint: Du kan bruke at prikkproduktet (dot product) er lineært uten bevis.

c) Finn matrisen A slik at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.