Oppgave 1 Finn den største verdien av funksjonen $f(x, y) = 2xy$ på området i planet hvor $x^2 + y^2 \leq 1$.

Oppgave 2 La S være ellipsoiden definert ved ligningen

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Finn en ligning for tangentplanet til S i et vilkårlig punkt (a, b, c) på S. Finn deretter punktene på S hvor tangentplanet er parallelt med planet $x + 2y + 3z = 0$.

Oppgave 3 Avgjør om hvert av de følgende vektorfeltene er konservativt:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x + \ln(y), 3y^2z + \tfrac{x}{y}, y^3\right),$$
$$\mathbf{G}(x, y, z) = \left(z + \ln(y), 3y^2z + \tfrac{x}{y}, y^3\right).$$

Finn så en potensialfunksjon for hvert vektorfelt som er konservativt.

Oppgave 4 Regn ut linjeintegralet

$$\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\, ds$$

der C er kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(\cos(t), \sin(t), e^t\right)$$

for $0 \leq t \leq \pi$.

Oppgave 5 Finn buelengden av kurven

$$\mathbf{r}(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \tfrac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right)$$

der $1 \leq t \leq T$ for en vilkårlig $T \geq 1$.

Oppgave 6 La R være området i planet avgrenset av linjene

$$x = y, \qquad x = -y, \qquad y = 1, \qquad y = 2.$$

Bruk polarkoordinater til å regne ut dobbeltintegralet

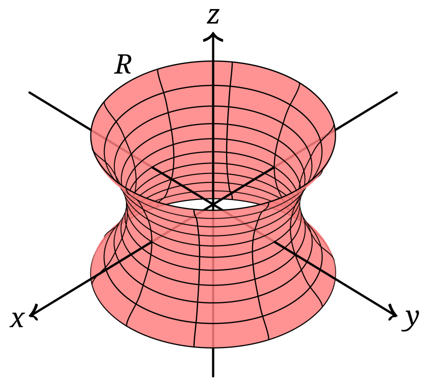
$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right)^{-3/2}\, dA.$$

Oppgave 7 Vis at funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinuerlig i $(0,0)$, og at de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer. Er f deriverbar i $(0,0)$? Svaret må begrunnes.

Oppgave 8
La R være den delen av hyperboloiden gitt ved $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ der $-1 \leq z \leq 1$.

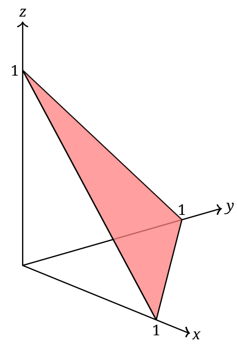


Bruk divergensteoremet til å regne ut flateintegralet

$$\iint_R \left(x^2 + e^{yz} z^3, 2(1-x)y + x^3 \tan(z), 0\right) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}$ peker ut av R.

Oppgave 9
La T være flaten gitt ved $x + y + z = 1$ der $x, y, z \in [0,1]$, og la C være randen av T, orientert mot klokken sett ovenfra.



Bruk Stokes' teorem til å regne ut linjeintegralet

$$\oint_C (2xy, y^{2023}, -x^2) \cdot d\mathbf{r}.$$

Oppgave 10 La S være den delen av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ der $0 \leq z \leq 1$. Finn arealet av S ved å regne ut et flateintegral.