Oppgåve 1 Finn og klassifiser dei kritiske punkta til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3.$$

Har f ein global (absolutt) maksimums- eller minimumsverdi på $\mathbb{R}^2$?

Oppgåve 2 Lat R vera området i fyrste kvadrant av planet som er avgrensa av hyperblane

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 = 2, \qquad xy = 3, \qquad xy = 4.$$

Rekn ut integralet

$$\iint_R (x^4 - y^4)\, dA$$

ved å skifta til nye variablar.

Oppgåve 3 Finn ein funksjon $f(x, y, z)$ slik at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x\sin(z), \cos(z) + y, f(x, y, z)\big)$$

er konservativt på $\mathbb{R}^3$.

Oppgåve 4 Litle Ola er glad i å aka, og har funne ut at akebakken kan skildrast av likninga $z = f(x, y)$, der

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}.$$

Viss Ola står i punktet $(1, 2, 2\sqrt{2})$, finn retninga i xy-planet han må aka i om han vil kjøyra brattast mogleg nedover. Finn òg ei likning for tangentplanet åt akebakken i dette punktet.

Oppgåve 5 Lat kurva C i planet vera trekanten med hjørne i punkta $(0, -1)$, $(-1, 1)$ og $(1, 1)$, orientert mot klokka. Nytt Greens teorem til å rekna ut linjeintegralet

$$\oint_C \left(e^{\sqrt{x}} + y(2x - 1), x^2 + \sqrt{\cos\big(y^3\big)}\right) \cdot d\mathbf{r}.$$

Oppgåve 6 Lat C vera kurva parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \big(ct, \cos(t), \sin(t)\big),$$

der $c \in \mathbb{R}$ er ein konstant. Vis at krumminga til C er konstant. For kva for ein verdi av c er krumminga størst?

Oppgåve 7 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{z^2\cos(z)}, 2xe^{\sin(z)}, 2\right)$$

har eit vektorpotensial av forma

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \left(-y, x, \phi(x,y,z)\right),$$

det vil seia at curl $\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Nytt dette til å rekna ut flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

der S er den luten av flata $x^2+y^2+3z^2=4$ der $z\ge 0$, og einingsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ peikar utover.

Oppgåve 8 Vis at den retningsderiverte

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h\mathbf{u})-f(0,0)}{h}$$

eksisterer for alle retningar $\mathbf{u}=(a,b)$ for funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

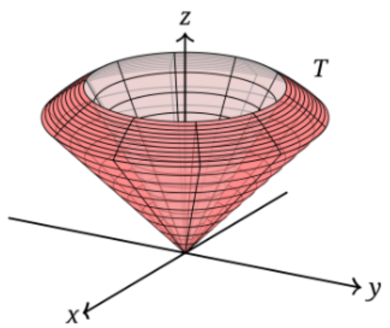
Er funksjonen $f(x,y)$ deriverbar i $(0,0)$? Svaret må grunngjevast.

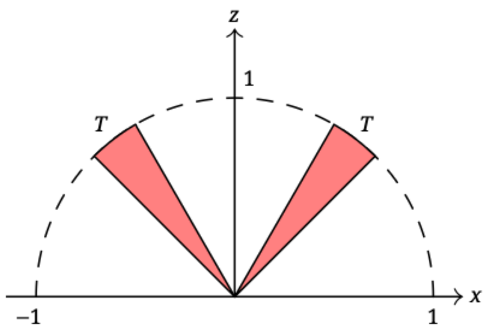
Oppgåve 9 Lat S vera flata der $x+2y+3z=0$ og $-1\le y\le 1$, $0\le z\le 1$. Rekn ut flateintegralet

$$\iint_S (2x, 3y-x, 1-2y)\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

der einingsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}$ peikar oppover.

Oppgåve 10 Lat T vera området i $\mathbb{R}^3$ avgrensa av kjeglene $z=\sqrt{x^2+y^2}$ og $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$, sfæra $x^2+y^2+z^2=1$ og kor dessutan $z\ge 0$. Skildr T i kulekoordinatar.





(*Oppgåva fortsett på neste side.*)

Lat so flata S vera randa av T, med positiv orientering. Finn divergensen av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^3, 3z^2 y + y^3, x^2 + \cos(y)\right)$$

og rekn ut flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der einingsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ svarar til orienteringa av S.