Oppgave 1 Finn den største og minste verdien til funksjonen $f(x, y) = xy$ på ellipsen gitt ved ligningen

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1.$$

Oppgave 2 Finn en ligning for tangentplanet i punktet (a, b, c) på ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Finn deretter punktene hvor tangentplanet er parallelt med planet $x + y + z = 0$.

Oppgave 3 La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x - z\sin y, \cos y).$$

Vis at $\mathbf{F}$ er konservativt ved å finne en tilhørende potensialfunksjon. Regn deretter ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}$ er kurven gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin^2 t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Oppgave 4 Avgjør om funksjonen

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

er kontinuerlig i origo.

Oppgave 5 La $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, \sqrt{3} \cdot t)$ for $t \geq 0$ være en parametrisering av kurven $\mathcal{C}$. Finn buelengdeparametriseringen av $\mathcal{C}$. Finn deretter krumningen til $\mathcal{C}$ som funksjon av buelengden.

Oppgave 6 La

$$I = \int_{-1}^{-1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{1 + x^2 + y^2} \, dy \, dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{1 + x^2 + y^2} \, dy \, dx.$$

Skisser integrasjonsområdet, og skriv I som ett iterert integral ved å bytte til polarkoordinater. Regn deretter ut verdien av integralet.

Oppgave 7 La T være området avgrenset av flatene $x = y^2$, $x + z = 1$ og $x - z = 1$. Skisser T, og finn volumet av T.

Oppgave 8 La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^3, y^3, z^3\right).$$

Bruk divergensteoremet til å bestemme

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\mathcal{S}$ er kuleflaten gitt ved ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, og $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen på $\mathcal{S}$ som peker utover.

Oppgave 9 En orientert kurve $\mathcal{C}$ er gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (2\sin t, \cos t, 2 + \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Vis at $\mathcal{C}$ ligger i et plan, og finn en ligning for dette planet. Hva slags kurve er projeksjonen av $\mathcal{C}$ i xy-planet?

b) Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, y, e^{xz}).$$