Oppgave 1 Finn punkta på hyperboloiden $z^2 + 2xy + 1 = 0$ som ligg nærast origo. (*Vink*: Minimer $x^2 + y^2 + z^2$.)

Oppgave 2 Lat $\mathcal{C}$ vera kurva gjeven ved parametriseringa

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2, t\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2}\right), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Vis at $\mathcal{C}$ ligg på eit kuleskal, og finn einingstangentvektoren $\widehat{\mathbf{T}}(t)$ til $\mathcal{C}$ som ein funksjon av t.

Oppgave 3 Lat D vera området i fyrste kvadrant av planet avgrensa av kurvene $y = x^2$, $y = 2x^2$, $xy = 1$ og $xy = 4$. Rekn ut

$$\iint_D y^3 \, dA.$$

Oppgave 4 Finn massen til lekamen avgrensa av flatene $z = x^2 + y^2$ og $z = 4$, der massetettleiken til lekamen er $\delta(x, y, z) = 2z$.

Oppgave 5 Avgjer om funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinuerleg i origo. Er funksjonen deriverbar i origo?

Oppgave 6 Lat $\mathbf{F}$ vera vektorfeltet gjevet ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x, xyz, 2x).$$

Avgjer om feltet er konservativt, og rekn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}$ er kurva i rommet gjeven ved parametriseringa

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, 0, 1 + \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(*Vink*: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.)

Oppgave 7 Lat $\mathcal{C}$ vera ellipsen gjeven ved likninga

$$x^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1,$$

orientert mot klokka. Bruk Greens teorem til å finna

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gjevet ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2y^3 x}{3\sqrt{1-x^2}}, y^2\sqrt{1-x^2} \right).$$

Oppgave 8 Avgjer om kvart av dei fylgjande vektorfelta har eit vektorpotensial, og gjev eit døme dersom det eksisterer:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, (y-x)^2, -2yz + z), \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (x^2, (y-x)^2, -2yz).$$

(Hugs at vektorfeltet $\mathbf{H}$ har eit vektorpotensial viss det finst eit vektorfelt $\mathbf{J}$ slik at $\mathbf{H} = \operatorname{curl} \mathbf{J}$.)

Oppgave 9 Lat $\mathbf{F}$ vera vektorfeltet gjevet ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(zx^3 + e^{-z}\cos y,\ \frac{4}{3}y^3 z + yx^2 z,\ 0 \right).$$

Bruk divergensteoremet til å finna

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\mathcal{S}$ er kjegla gjeven ved $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $0 \leq z \leq 1$, og $\hat{\mathbf{N}}$ er normalvektoren til $\mathcal{S}$ med negativ z-komponent.

Oppgave 10 Lat $\mathcal{S}$ vera den delen av kuleskalet $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ som ligg over planet $z = 0$, og lat vektorfeltet $\mathbf{F}$ vera gjevet ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^x, 2x + y^4, z + x\sin y).$$

Finn curl $\mathbf{F}$, og rekn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er einingsnormalvektoren på $\mathcal{S}$ som peiker utover.