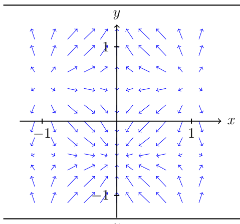
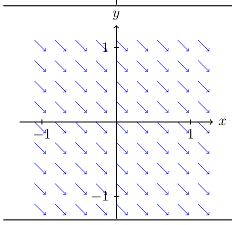
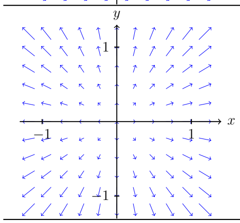
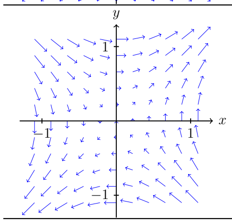
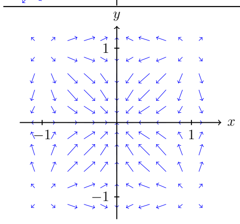
Dette er en kombinasjon av oppgavene som ble gitt til eksamen.

Oppgave 1 Figurene nedenfor viser illustrasjoner av fem forskjellige konservative vektorfelt i $\mathbb{R}^2$. Hver av disse har en tilhørende potensialfunksjon i listen under.

1. $\Phi_1(x,y) = x - y$
2. $\Phi_2(x,y) = xy$
3. $\Phi_3(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
4. $\Phi_4(x,y) = \frac{1}{\pi}(\cos \pi x + \cos \pi y)$
5. $\Phi_5(x,y) = \frac{1}{\pi}(\cos \pi x - \sin \pi y)$

Oppgaven går ut på å tilordne hvert vektorfelt til den tilhørende potensialfunksjonen.

Hvilket vektorfelt passer til hvilken potensialfunksjon?

	1	3	4	2	5
	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○

Oppgave 2 La D være enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$ med hjørner i punktene $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ og $(0,1)$, og la $\mathcal{C}$ være randen til D. Kurven $\mathcal{C}$ er positivt orientert med hensyn på D. La $\mathbf{r}(t)$ være en parametrisering av $\mathcal{C}$, og la $\widehat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalvektoren til $\mathcal{C}$ som peker ut av D.

La $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$ være vektorfelt i $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (-2xy, 2y) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{G}(x,y) = (-x^2, x^2 + 2y).$$

Nedenfor ser du fire påstander om disse vektorfeltene. Avgjør om påstandene er rette eller gale:

1. $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{G}$

   ☐ Riktig
   ☐ Galt

2. $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, ds = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, ds$

   ☐ Riktig
   ☐ Galt

3. $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$

   ☐ Riktig
   ☐ Galt

4. $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, ds = -1$

   ☐ Riktig
   ☐ Galt

Oppgave 3 Finn største og minste verdi av funksjonen

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)(2 - y)$$

på området

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 4\},$$

samt alle punktene der disse ekstremalverdiene oppnås.

Svaret må begrunnes.

Oppgave 4 Er funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

kontinuerlig? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 5 Ole står i et terreng hvor høyden over havet (i meter) er gitt ved

$$h(x,y) = 300 + 200\sin\left(\frac{\pi x}{100}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{100}\right).$$

Anta at Oles koordinater i xy-planet $(50, 25)$. I hvilke retninger er terrenget brattest? I hvilke retninger kan Ole bevege seg dersom han ønsker å beholde en uendret høyde over havet?

Oppgave 6 La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven i $\mathbb{R}^3$ mellom sylinderen $x^2 + z^2 = 1$ og planet $z = 2 - y$. Vis at

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, 2 - \sin t, \sin t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

er en gyldig parametrisering av kurven $\mathcal{C}$. Bruk denne til å finne et uttrykk for krumningen κ til kurven som funksjon av parameteren t. Angi punktene på kurven med henholdsvis maksimal og minimal krumning.

Oppgave 7 La $\mathcal{S}$ være den delen av flaten $z = y^2$ som ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og hvor $y \geqslant 0$. La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xe^z, xy + ye^z, x^2e^z + z\cos y).$$

Finn $\operatorname{curl}\mathbf{F}$, og regn ut linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$ er randen av $\mathcal{S}$ orientert mot klokka sett ovenfra.

Oppgave 8

1. La D være området i $\mathbb{R}^2$ som ligger mellom kurvene $xy = 2$ og $x^2+y^2 = 5$ for $x \geqslant 0$. Skisser området D, og skriv integralet

$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

som et iterert integral, der $f(x,y)$ er en funksjon som er integrerbar på D.

2. La $\mathcal{S}$ være flaten gitt ved $z = x^2 + y^2$ for $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Oppgi en parametrisering av flaten $\mathcal{S}$, og skriv integralet

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS$$

som et iterert integral, der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen med positiv z-komponent og $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt på $\mathcal{S}$.

Oppgave 9 La

$$f(x,y) = \frac{x}{y}(e^{x/y} + e^{xy})$$

og la D være området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av kurvene $y = 4x$, $y = 1/x$, $y = x$ og $y = 2/x$.

Beskriv D i variablene $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$ og skriv dobbeltintegralet

$$\iint_D f(x,y)\, dA$$

som et iterert integral ved å skifte til variablene u, v.

(Merk at du *ikke* skal regne ut verdien av integralet.)

Oppgave 10 La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x\cos^2 z + yz, 3y\sin^2 z + e^x, x^2 + y^2)$$

Finn først divergensen til $\mathbf{F}$, og finn deretter en lukket flate $\mathcal{S}$ i $\mathbb{R}^3$ som oppfyller

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = 4\pi.$$

Beskriv flaten $\mathcal{S}$ med én eller flere ligninger og/eller ulikheter.

Merk: Her finnes det mange riktige svar.