Dette er ein kombinasjon av oppgåvene som ble gitt til eksamen.

Oppgåve 1 Lat $\mathcal{S}$ vera den elliptiske kjegla gjeven ved

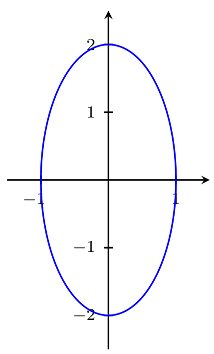
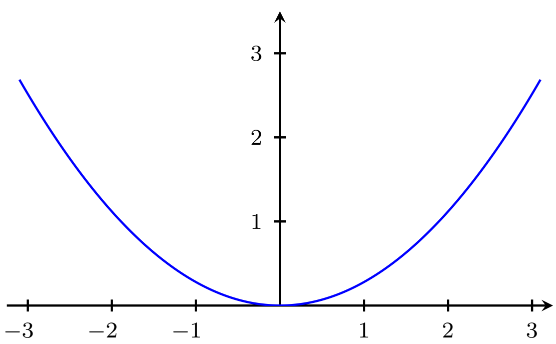
$$x^2 = (2y)^2 + z^2.$$

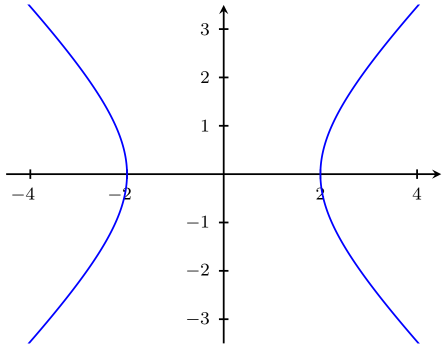
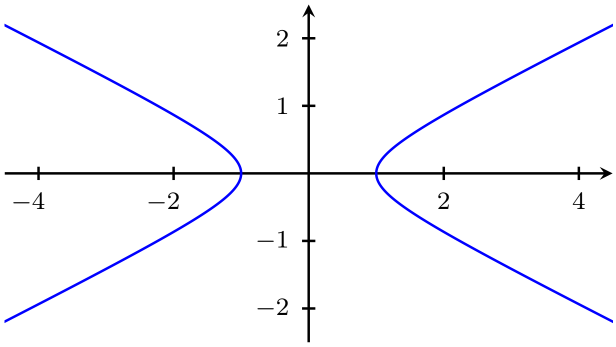
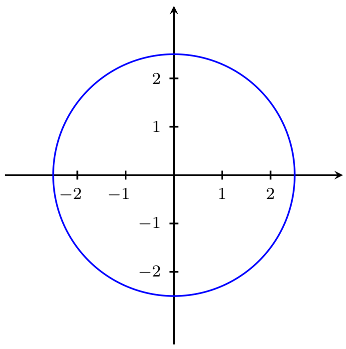
Om me skjer $\mathcal{S}$ med eit plan, vil me få ei skjeringskurve i rommet. Nedanfor er gjevne algebraiske uttrykk for fem plan.

1. $z = 1$
2. $y = 1$
3. $x = 2$
4. $x = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}y$
5. $x = 2 - 2y$

I kvar kolonne nedanfor ser du ei skisse av skjeringskurva mellom eit plan og $\mathcal{S}$ slik den vil sjå ut i det aktuelle planet. Oppgåva går ut på å tilordna kvart av dei algebraiske uttrykka til rett illustrasjon.

Kva for ei skjeringskurve kjem fram i kva for eit plan?

	1	2	3	4	5
	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○

	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○

Oppgåve 2 Avgjer om fylgjande påstandane er sanne eller usanne for funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Funksjonen $f(x,y)$ er kontinuerleg i origo. Vel eitt alternativ.

- ○ Sant
- ○ Usant

2) Dei partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer for alle (x,y). Vel eitt alternativ.

- Sant
- Usant

3) Dei partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er kontinuerlege i origo. Vel eitt alternativ.

- Sant
- Usant

4) Funksjonen $f(x, y)$ er deriverbar i origo. Vel eitt alternativ.

- Sant
- Usant

Oppgåve 3 Lat $\mathcal{C}$ vera skjeringskurva i rommet mellom flatene

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{og} \quad z = x^2 + 2y^2.$$

Finn ei parametrisering av $\mathcal{C}$, og finn einingstangenten $\hat{\mathbf{T}}$ til $\mathcal{C}$ i punktet $(-1, 1, 3)$.

Oppgåve 4 Finn den største og minste verdien av funksjonen

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^6 + 4z^4$$

på flata

$$x^2 + y^6 + z^4 = 1.$$

Oppgåve 5 Lat $\mathbf{F}$ vera vektorfeltet gjeve ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xz, ze^{z\sin y}\cos y, e^{z\sin y}\sin y + x^2\right).$$

Vis at $\mathbf{F}$ er konservativt ved å finna ein tilhøyrande potensialfunksjon. Rekn deretter ut linjeintegralet

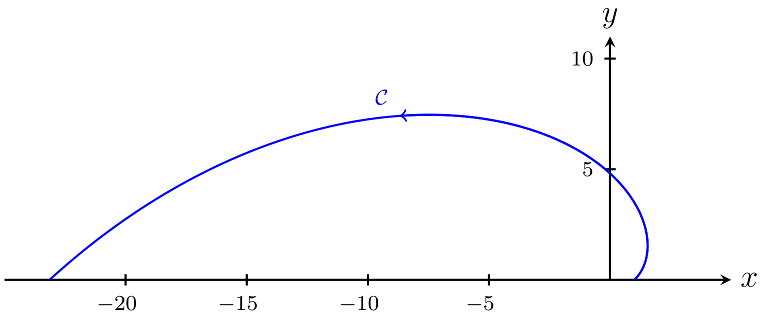
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}$ er kurva i rommet gjeven ved parametriseringa

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, t, t + 2\sin^2 t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Oppgåve 6 Lat $\mathcal{C}$ vera den polare kurva gjeven ved

$$r(\theta) = e^{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$



Finn arealet avgrensa av $\mathcal{C}$ og x-aksen. Finn deretter

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{F}(x, y) = (y, 2x + \cos y)$, og $\mathcal{C}$ er orientert som vist i figuren.

Oppgåve 7 Finn arealet av den delen av flata

$$x = y^2 + z^2$$

som ligg mellom plana $x = 1$ og $x = 4$ ved å rekna ut eit flateintegral.

Oppgåve 8 Lat $\mathcal{C}$ vera den lukka kurva i $\mathbb{R}^3$ gjeven ved parametriseringa

$$\mathbf{r}(t) = (1, R\cos t, R\sin t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

der $R > 0$ er ein fiksert konstant. Lat vektorfeltet $\mathbf{F}$ vera gjeve ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{yz}, 2yz - \cos x, y^2 + y + e^z\right).$$

Finn fyrst $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, og finn deretter verdien for R som gjev

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi.$$

Oppgåve 9 For $0 < T < \pi/2$, skriv integralet

$$\int_0^{\cos T} \int_0^{x \tan T} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx + \int_{\cos T}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

som eitt iterert integral ved å byta til kulekoordinatar.

Oppgåve 10 Lat $f(x, y, z)$ vera ein glatt funksjon på $\mathbb{R}^3$ slik at gradienten i punktet $(1, 1, 1)$ er

$$\nabla f(1, 1, 1) = (1, 1, 2\pi),$$

og lat

$$g(r, \theta, z) = f(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z)$$

vera f uttrykt i sylinderkoordinatar. Finn verdien av den partiellderiverte $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ i punktet med sylinderkoordinatar $(r, \theta, z) = (\sqrt{2}, \pi/4, 1)$.