Oppgave 1

Det tredimensjonale legemet T i første oktant (dvs. $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$) ligger mellom flatene $z = 0$ og $z = \sin(\frac{\pi}{2}x)$. T er videre avgrenset av $x = 1$, $y = 0$ og $y = x^2$. Nedenfor er gitt fem uttrykk. Du skal velge ut det ene uttrykket som *ikke* er et uttrykk for volumet til T.

Velg ett alternativ. I Inspera kommer alternativene i tilfeldig rekkefølge.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{\sin(\frac{\pi}{2}x)} dzdydx$

(ii) $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{4x^2}{\pi^2}} \int_0^{\sin x} dzdydx$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{\sin(\frac{\pi}{2}x)} dzdydx$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^{\sin(\frac{\pi}{2}x)} dzdxdy$

(v) $\displaystyle\frac{2}{\pi} - \int_0^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{\sin(\frac{\pi}{2}x)} dzdydx$

Oppgave 2

La D være det lukkede området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av x-aksen og halvsirkelen $x^2+y^2 = 1$, $y \geq 0$, og la $\mathcal{C}$ være randen til D. $\mathcal{C}$ er positivt orientert i forhold til D. $\mathbf{r}(t)$ er en parametrisering av $\mathcal{C}$, og $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektor til $\mathcal{C}$ som peker ut av D.

Gitt to vektorfelt,

$$\mathbf{F}(x,y) = (x-2)y\mathbf{i} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\mathbf{j} \quad \text{og} \quad \mathbf{G}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{F}(x,y).$$

Nedenfor er det satt opp fem påstander om disse vektorfeltene der *én* ikke er sann. Hvilken?

Velg ett alternativ. I Inspera kommer alternativene i tilfeldig rekkefølge.

(i) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi$

(ii) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds$

(iii) $\text{curl } \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{G}$

(iv) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$

(v) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = \pi$

Oppgave 3

Nedenfor er gitt algebraiske uttrykk for fem vektorfelt i $\mathbb{R}^2$.

(i) $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$,

(ii) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$,

(iii) $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$,

(iv) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$,

(v) $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

På vedlegget bakerst i dokumentet er det vist illustrasjoner av hvert av disse vektorfeltene. Oppgaven går ut på å tilordne hvert algebraiske uttrykk til korrekt illustrasjon.

I Inspera kommer alternativene både i radene og kolonnene i tilfeldig rekkefølge.

Oppgave 4

Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0 \text{ og } b > 0,$$

kan parametriseres ved $x = a\cos t$ og $y = b\sin t$, $0 \leq t < 2\pi$.

La A være arealet innenfor ellipsen. Bruk Greens teorem til å vise at $A = \pi ab$.

Du får oppgitt at $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$.

Oppgave 5

Ei flate i rommet er gitt ved funksjonsuttrykket $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y}$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Bestem den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}}f(1, 1)$ i retningen $\mathbf{u}$, der $\mathbf{u}$ har positiv x-komponent og er parallell med tangenten til kurven $y = x^2$ i punktet $(1, 1)$. Skriv opp både vektoren $\mathbf{u}$ og verdien av $D_{\mathbf{u}}f(1, 1)$ i svaret ditt.

Oppgave 6

La $f(x, y)$ være en glatt funksjon i $\mathbb{R}^2$, der $f(x, y) \geq 0$. La I være gitt ved uttrykket nedenfor.

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_4^9 \int_{-\sqrt{x}}^{6-x} f(x, y) dy dx.$$

Skriv I som *ett* iterert integral og gi en geometrisk fortolkning av verdien av I.

Oppgavene 7-10 innebærer en del regning. Siden det er tungvint å skrive inn utregninger i Inspera, ber vi ikke om at du skriver inn utregningene du har gjort. For allikevel å kunne vurdere fremgangsmåten, ber vi for disse oppgavene om følgende:

- Gjør kort rede for hvordan du har tenkt og hvilke teoremer du eventuelt har brukt.
- Skriv inn eventuelle mellomsvar som du har brukt videre i utregningen.
- Angi det endelige svaret.

Dette vil gjøre at vi kan gi uttelling for oppgaven selv om det endelige svaret ikke er helt rett.

Oppgave 7

La $\mathcal{C}$ være romkurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t \in [0, \pi].$$

Bestem enhetstangentvektor til kurven $\mathcal{C}$ i punktet der $t = \pi/2$, og regn ut lengden av $\mathcal{C}$.

For veiledning om hvordan oppgaven skal besvares, se informasjonen foran Oppgave 7.

Oppgave 8

Funksjonen

$$f(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} + 4x - x^2$$

er definert på det lukkede området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

Bestem eventuelle kritiske punkter for f i D. Finn den absolutte maksimumsverdien og den absolutte minimumsverdien for f i D, og angi hvilke punkter disse verdiene antas i.

For veiledning om hvordan oppgaven skal besvares, se informasjonen foran Oppgave 7.

Oppgave 9

Et legeme T ligger i første oktant (dvs. $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$) og er avgrenset av koordinatplanene $x = 0$, $y = 0$ og $z = 0$, samt av flatene $z = 4 - x^2$ og $y = 4 - x^2$. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

La $\mathcal{S}$ være den delen av overflata (randa) til T som ligger på flata $z = 4 - x^2$.

Bestem verdien av fluksintegralet

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren med positiv z-komponent.

For veiledning om hvordan oppgaven skal besvares, se informasjonen foran Oppgave 7.

Oppgave 10

La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom sylinderflata $x^2 + y^2 = 9$ og planet $x - 2y + z + 2 = 0$, der $\mathcal{C}$ har positiv orientering mot klokka sett ovenfra.

Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - 3y^2)\mathbf{i} + (\frac{z^2}{2} + y)\mathbf{j} + (x + 2z^2)\mathbf{k}$.

Finn verdien av linjeintegralet $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

For veiledning om hvordan oppgaven skal besvares, se informasjonen foran Oppgave 7.

Vedlegg til Oppgave 3

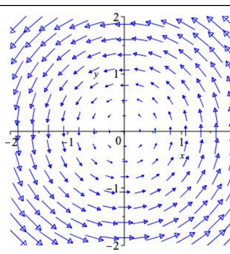
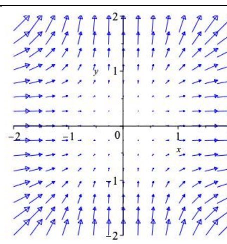
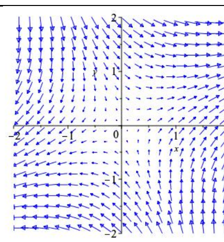
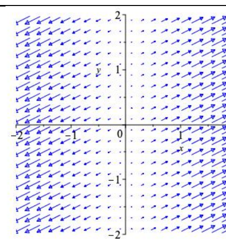
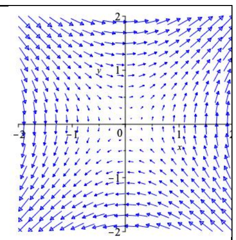
Oppgave 3

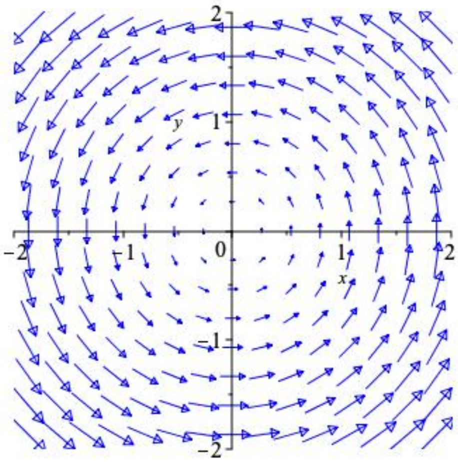
Nedenfor er gitt algebraiske uttrykk for fem vektorfelt i $\mathbf{R}^2$.

1. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + \boldsymbol{x}\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + \boldsymbol{x}\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + \boldsymbol{x}\mathbf{j}$

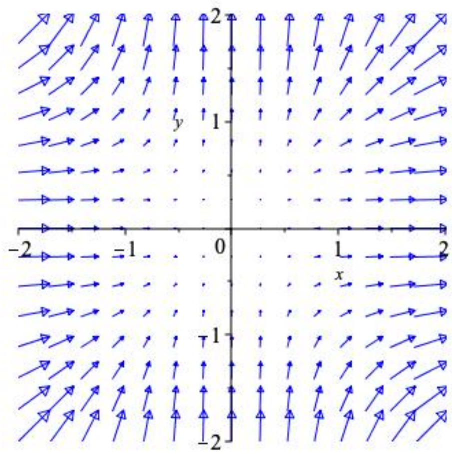
I hver kolonne ser du en illustrasjon av ett av disse vektorfeltene. Oppgaven går ut på å tilordne hvert algebraiske uttrykk til korrekt illustrasjon.

Hvilket vektorfelt passer til hvilken illustrasjon?
I Inspera kommer alternativene både i radene og kolonnene i tilfeldig rekkefølge.
Større bilder av vektorfeltene er vist på neste side.

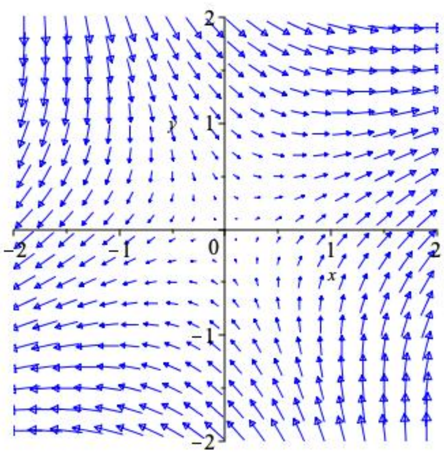
	 A	 B	 C	 D	 E
1					
2					
3					
4					
5					


2
y
1
−2
−1
0
1
x
2
−1
−2

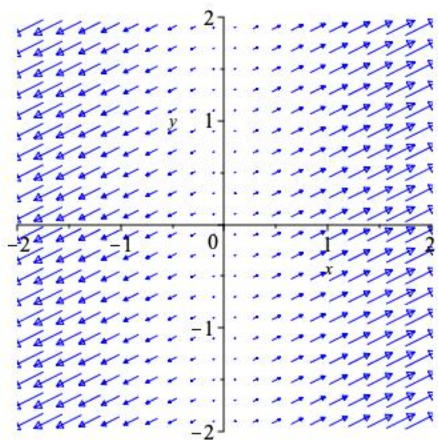
A


2
y
1
−2
−1
0
1
x
2
−1
−2

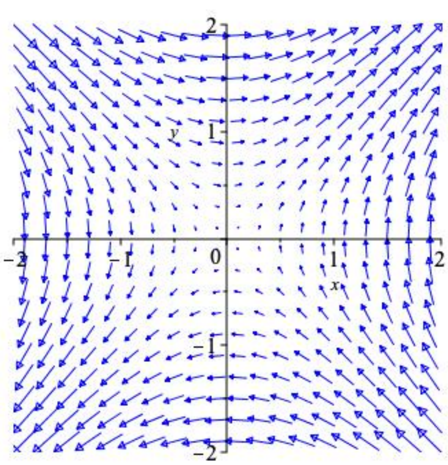
B


2
y
1
−2
−1
0
1
x
2
−1
−2

C


2
y
1
−2
−1
0
1
x
2
−1
−2

D


2
y
1
−2
−1
0
1
x
2
−1
−2

E