Oppgave 1 Ei flate i $\mathbb{R}^3$ er gitt ved likninga $xy^2 + xz^2 = 5$. Ett av planene gitt ved likningene nedenfor er tangentplan til denne flata i punktet $(1, -1, 2)$. Hvilket er det?

(i) $5x - 2y + 2z = 11$

(ii) $5x + 2y - 4z = -5$

(iii) $5x - 2y + 4z = 15$

(iv) $-5x + 2y + 4z = 1$

(v) $x - y + 2z = 6$

Velg ett alternativ. I Inspera kommer alternativene i tilfeldig rekkefølge.

Oppgave 2

Nedenfor er gitt uttrykk for fem funksjoner $f(x, y)$. For nøyaktig én av disse funksjonene er det mulig å definere en verdi for $f(0, 0)$ slik at f blir kontinuerlig i $(0, 0)$. For hvilken av funksjonene er dette mulig?

(i) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^4 + y}$

(ii) $f(x, y) = \dfrac{2x^8}{x^8 + y^4}$

(iii) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

(iv) $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(v) $f(x, y) = \dfrac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}$

Velg ett alternativ. I Inspera kommer alternativene i tilfeldig rekkefølge.

Oppgave 3

Nedenfor er gitt funksjonsuttrykk for fem funksjoner på formen $z = f(x, y)$. På vedlegget er vist nivåkurver, $f(x, y) = c$ for $c = 0, 1, 2, 3, 4$, for hver av disse funksjonene. Oppgaven går ut på å tilordne hvert funksjonsuttrykk til korrekt illustrasjon.

(i) $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$

(ii) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$

(iii) $f(x, y) = 2y^2 - x^2$

(iv) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$

(v) $f(x, y) = y^2 - x^2$

I Inspera kommer alternativene i tilfeldig rekkefølge.

Oppgavene 4-10 innebærer en del regning. Siden det er tungvint å skrive inn utregninger i Inspera, ber vi ikke om at du skriver inn alle utregningene du har gjort. For allikevel å kunne vurdere fremgangsmåten, ber vi for disse oppgavene om følgende:

- Gjør kort rede for hvordan du har tenkt og hvilke teoremer du eventuelt har brukt.
- Skriv inn eventuelle mellomsvar som du har brukt videre i utregningen.
- Angi det endelige svaret.

Dette vil gjøre at vi kan gi noe uttelling for oppgaven selv om det endelige svaret ikke er helt rett.

Oppgave 4 Kurvene $x + y^2 = 0$, $x + y^2 = 4$, $y = 0$ og $y = 2$ avgrenser et område D i xy-planet. Ei metallplate med massetetthet per arealenhet gitt ved $\rho(x, y) = 1 + y$ dekker området D. Finn massen til denne metallplata.

Oppgave 5 Finn alle de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$$

og avgjør hva slags type de er.

Oppgave 6 La S være den delen av flata $z = 1 + x^2 + y^2$ som ligger inne i sylinderen $x^2 + y^2 = 1$. Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3 - x^2y^2)\mathbf{i} + (\frac{2}{3}xy^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Bestem verdien av flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren til S med negativ $\mathbf{k}$-komponent.

Oppgave 7

Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-2x + y\sin(xy), x\sin(xy) + z\cos(yz), y\cos(yz)),$$

for $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. La $\mathcal{C}$ være kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = t\sin t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t(1 + \cos t)\mathbf{k},$$

der $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Forklar hvorfor vektorfeltet $\mathbf{F}$ er konservativt, og finn verdien av linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Oppgave 8

For $t > 0$ la D_t betegne området i xy-planet gitt ved $0 \leq x \leq t$ og $0 \leq y \leq 2$. La V_t være volumet av det tredimensjonale legemet som ligger mellom området D_t og flaten gitt ved $z = f(x,y)$ der

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+1)^2(y+2)^2}.$$

Finn det minste tallet $T > 0$ slik at $V_t \geq \frac{1}{5}$ for alle $t \geq T$.

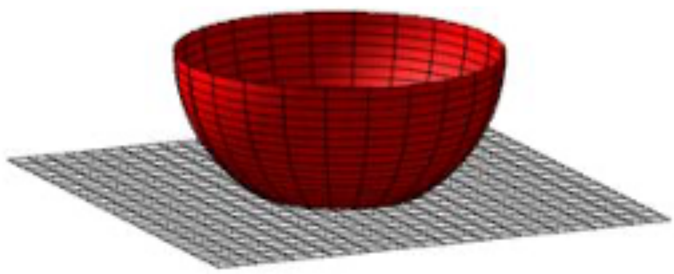
Oppgave 9 Gitt tre punkter $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ og $P_3 = (0, 0, 2)$ og vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}z(x + y)\mathbf{i} + z(y - \frac{1}{2}x)\mathbf{j} + \frac{1}{2}y(y - x)\mathbf{k}.$$

La $\mathcal{C}$ være kurven som består av de rette linjestykkene som forbinder P_1, P_2 og P_3, orientert med urviseren sett fra punktet $(1, 1, 1)$. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Oppgave 10 En beholder er formet som et halvkuleskall med radius 4. Fra halvkuleskallet er det skåret av en skalk slik at beholderen får en sirkelformet flat bunn med radius 2. Bunnen er parallell med sirkelen som danner kanten rundt åpningen (se figur nedenfor). Beholderen fylles med vann slik at høyden fra bunnen og opp til vannflata er halvparten av høyden fra bunnen og opp til åpningen. Finn høyden fra bunnen og opp til vannflata og volumet av vannet som er i beholderen.



Vedlegg til Oppgave 3

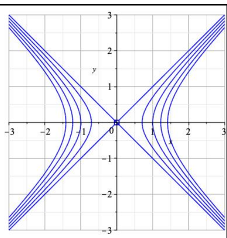
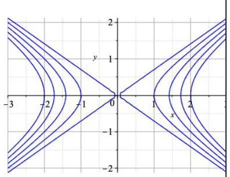
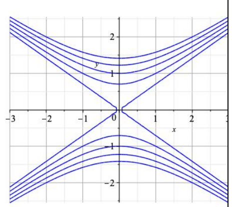
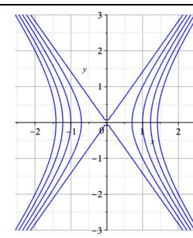
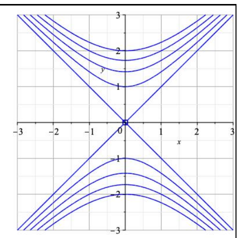
Oppgave 3

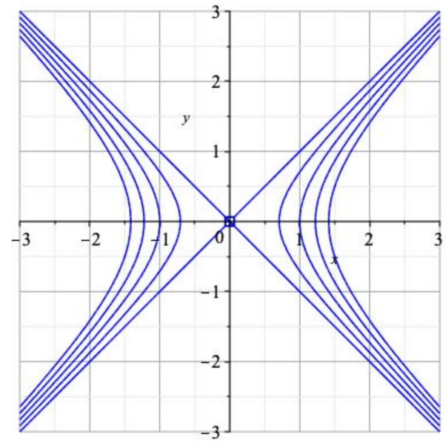
Nedenfor er gitt funksjonsuttrykk for fem funksjoner på formen $z = f(x,y)$.

1. $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$
2. $f(x,y) = x^2 - 2y^2$
3. $f(x,y) = 2y^2 - x^2$
4. $f(x,y) = 2x^2 - y^2$
5. $f(x,y) = y^2 - x^2$

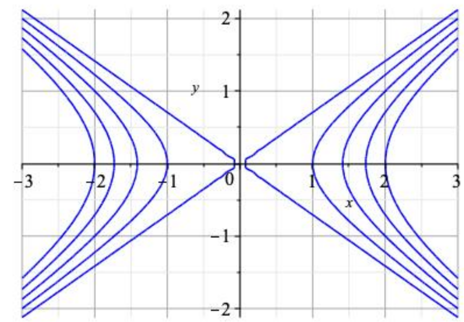
I hver kolonne, A-E, ser du illustrasjoner av nivåkurvene $f(x,y) = c$, $c = 0, 1, 2, 3$ og 4, for hver av disse funksjonene. Oppgaven går ut på å tilordne hvert funksjonsuttrykk til korrekt illustrasjon.

Hvilket funksjonsuttrykk passer til hvilken illustrasjon?
I Inspera kommer alternativene både i radene og kolonnene i tilfeldig rekkefølge.
Større bilder av nivåkurvene er vist på neste side.

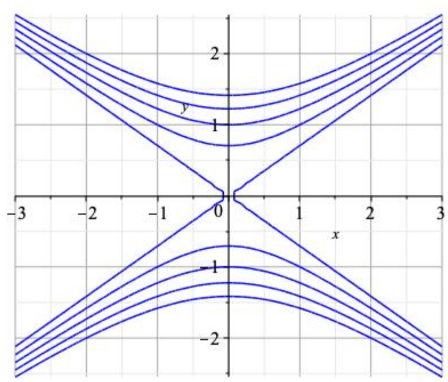
	 A	 B	 C	 D	 E
1					
2					
3					
4					
5					



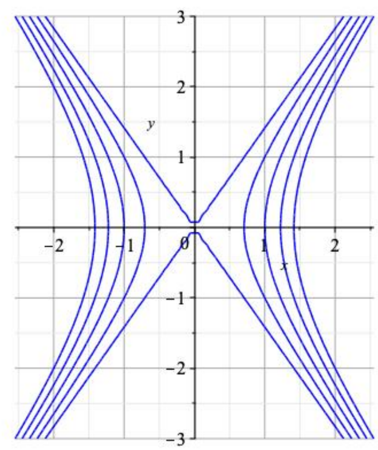
A



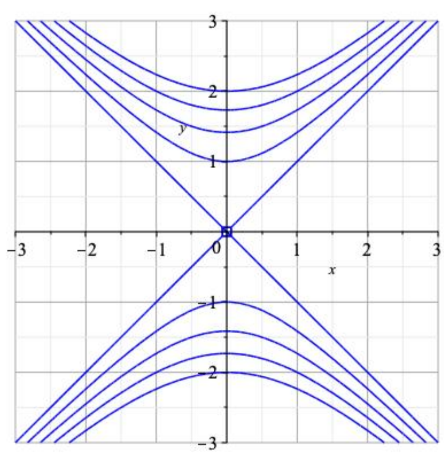
B



C



D



E