Oppgave 1 Hvilken av følgende parametriseringer er *ikke* en gyldig parametrisering av skjæringskurven mellom kjeglen gitt ved $z = \sqrt{x^2+y^2}$ og planet $y+z=2$ i første oktant ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ og $z \geqslant 0$)?

$$(i) \quad \mathbf{r}(t) = \big(2\sqrt{1-t}, t, 2-t\big), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$(ii) \quad \mathbf{r}(t) = \left(t, 1-\frac{t^2}{4}, 1+\frac{t^2}{4}\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

$$(iii) \quad \mathbf{r}(t) = (2\cos t, \sin t, 2-\sin t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

$$(iv) \quad \mathbf{r}(t) = (2\sqrt{t-1}, 2-t, t), \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2$$

Merk: Rekkefølgen for alternativene vil variere i Inspera og trenger ikke å sammenfalle med rekkefølgen presentert over.

Oppgave 2 Finn største og minste verdi av funksjonen

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + x - y^2,$$

på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

Oppgave 3 Finn buelengden til kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (4\ln t, t^2, 4t), \qquad 1 \leqslant t \leqslant e.$$

Oppgave 4 Er funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

kontinuerlig? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 5 Regn ut

$$\int_0^{\pi} \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \sin(xy)\, dy\, dx\, dz.$$

Oppgave 6 Finn volumet av området i $\mathbb{R}^3$ gitt ved ulikhetene

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 9, \quad 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{og} \quad 0 \leqslant x \leqslant y.$$

Oppgave 7 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xy, x^2+1, z^2\right), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

ikke er konservativt.

Finn et vektorfelt $\mathbf{G}(x,y,z)$ slik at vektorfeltet

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + \mathbf{G}(x,y,z)$$

er konservativt, der $\mathbf{H}(x,y,z)$ ikke er et konstant vektorfelt.

Oppgave 8 Finn den største verdien til

$$\oint_{\mathcal{C}} y^3\,dx + (27x - x^3)\,dy,$$

der $\mathcal{C}$ er en enkel, lukket kurve i xy-planet orientert mot klokken.

(Vink: $27 - 3(x^2+y^2) \geqslant 0$ hvis og bare hvis $x^2+y^2 \leqslant 9$.)

Oppgave 9 La T være området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av flaten gitt ved $z = \sqrt{x^2+y^2}$ og planene $z = 1$ og $z = 4$. La $\mathcal{S}$ være den delen av randen (overflaten) til T, ∂T, som ligger på flaten $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^3, x+z^2, z).$$

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker vekk fra z-aksen.

Oppgave 10 La $\mathcal{C}$ være kurven gitt ved $x^2+z^2 = 1$, $y = 0$, og la $\mathcal{C}$ være orientert mot klokken sett fra positiv y-akse.

Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} (4z + e^{\cos x})\,dx + y^4\,dy + (x+2y)\,dz.$$