Oppgave 1 Finn en parametrisering av skjæringskurven mellom flatene

$$z = 3\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{og} \qquad x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Husk å angi intervallet for parameteren.

Oppgave 2 Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} y\,dx + (xy - x)\,dy,$$

der $\mathcal{C}$ er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ orientert mot klokken.

Er vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, xy - x)$ konservativt? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 3 Skriv

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \int_0^{x/\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx + \int_{2\sqrt{3}}^{4} \int_0^{\sqrt{16 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$$

som ett iterert integral, og regn ut.

Oppgave 4 Legemet T er definert ved ulikhetene

$$x^2 + y^2 - 1 \leqslant z \leqslant 2 + \frac{2}{3}(x^2 + y^2), \qquad z \geqslant 0.$$

Skissér snittet mellom T og yz-planet, og finn volumet av T.

Oppgave 5 Finn arealet av den delen av flaten $z = \sqrt{2xy}$ som ligger over 1. kvadrant i xy-planet, og som er begrenset av planene $x = 1$ og $y = 2$.

Oppgave 6 La flaten gitt ved

$$z = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

angi meter over havet, der havnivå er gitt ved $z = 0$ og (x, y) angir posisjon på kartet.

Du befinner deg i punktet $(6, 3, 20/11)$ på flaten og går i sørvestlig retning (det vil si i retningen $(-1, -1)$ på kartet). Hvor mange grader stiger terrenget i denne retningen i dette punktet?

Oppgave 7 Halvkulen T er gitt ved $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, der $a > 0$ er en konstant. La $\mathcal{S}$ være den krumme delen av randen (overflaten) til T med enhetsnormalvektor $\hat{\mathbf{N}}$ som peker ut av T.

a) La halvkulen ha massetetthet $\delta(x,y,z) = kz$, der $k > 0$ er en konstant. Finn massen til halvkulen.

b) Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x(z+z^2), -(yz^2+xe^y), xze^y+1),$$

regn ut

$$\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV \qquad \text{og} \qquad \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

Oppgave 8 Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} y^2\,dx + xy\,dy + xz\,dz,$$

der $\mathcal{C}$ er skjæringskurven mellom sylinderen $x^2+y^2 = 2y$ og planet $y = z$ og $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken sett ovenfra.

Oppgave 9 Gitt funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

vis at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

eksisterer, men at $\frac{\partial f}{\partial x}$ ikke er kontinuerlig i $(0,0)$.