Oppgave 1 Finn en ligning for tangentplanet til flaten gitt ved

$$4(x+1)^2 + 6(y-1)^2 + x^2(z-2)^2 = 16$$

i punktet $(1/2, 2, 0)$.

Oppgave 2 En kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2 + \sqrt{2}\cos t, 1 - \sin t, 3 + \sin t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Finn enhetstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}(t)$ og enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}(t)$ for et vilkårlig punkt på kurven, og bestem så krumningen $\kappa(t)$ i et vilkårlig punkt på kurven.

Oppgave 3 Finn største verdi til funksjonen $f(x, y) = e^{xy}$ på kurven $x^3 + y^3 = 16$, der (x, y) ligger i 1. kvadrant.

Oppgave 4 Finn volumet av området T begrenset av xy-, xz-, og yz-planet, sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og flaten

$$z = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Oppgave 5

Regn ut

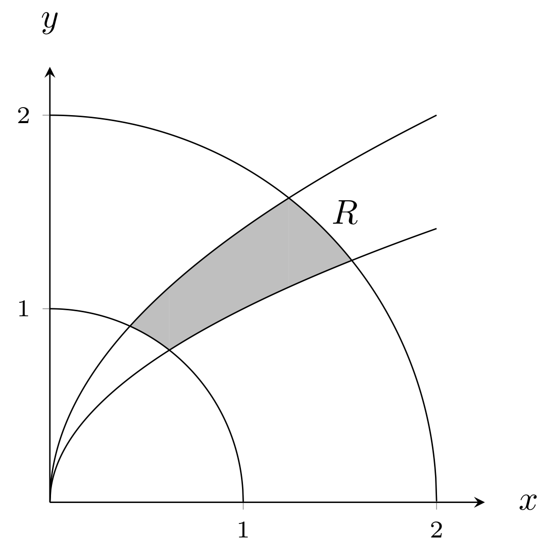
$$\iint_R \frac{y^3}{x}\left(2 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx\, dy,$$

der R er området i 1. kvadrant i xy-planet som er begrenset av kurvene

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = 4$$

og

$$y^2 = x \qquad y^2 = 2x.$$



Oppgave 6 Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2 z, yf(x)),$$

bestem funksjonen $f(x)$ slik at linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

blir uavhengig av veivalg mellom start- og endepunkt for en kurve $\mathcal{C}$. Hva blir i dette tilfellet verdien av

$$\int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}'$ er en vilkårlig kurve i $\mathbb{R}^3$ med startpunkt i $(0, 0, 0)$ og endepunkt i (a, b, c)?

Oppgave 7 Bruk Greens teorem til å finne arealet av området i xy-planet som er begrenset av kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t - \cos t, 1 - \cos t)\,,$$

der $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ og x-aksen.

(Vink: Bruk vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 0)$.)

Oppgave 8 Gitt et vektorfelt $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz, 0, (x-1)^2)$ og tre punkter $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ og $P_3 = (0, 0, 2)$ i $\mathbb{R}^3$. La T være tetraederet («pyramiden») med hjørner i P_1, P_2, P_3 og $(0, 0, 0)$, og la $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalvektoren på overflaten ∂T som peker ut av T.

a) Bestem

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

b) Finn $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ og regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}$ er den lukkede kurven orientert mot klokken sett ovenfra som består av linjestykkene P_1P_2, P_2P_3 og P_3P_1.

Oppgave 9 Ligningen

$$x + z + (y + z)^5 = 6$$

definerer z implisitt som en funksjon av x og y. Regn ut

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

i punktet $(2, -2, 3)$.